

Řešení reálných a komplexních problémů v programu Mathematica

Ilja Černý, Praha

(Předneseno na setkání uživatelů sw Mathematica dne 14.9.2005)

Moto: *Mísení reálných a komplexních metod má pro reálný kalkulus zhoubné následky.*

1. Algebraické úpravy

(Druhá) odmocnina je v MATH definována rovností

$$(1) \quad \text{Sqrt}[x_] := \text{Exp}\left[\frac{1}{2}\text{Log}[x]\right],$$

kde „Log“ je hlavní hodnota *komplexního* logaritmu (s body nespojitosti na nekladné části reálné osy). MATH v důsledku toho nemůže upravit výraz

$$(2) \quad \text{Sqrt}[a b] - \text{Sqrt}[a] \text{Sqrt}[b],$$

protože nemusí vyjít 0. Je totiž např. $a = b = -1$, je $a b = 1$, $\text{Sqrt}[a] = \text{Sqrt}[b] = i$, takže

$$\text{Sqrt}[a b] - \text{Sqrt}[a] \text{Sqrt}[b] = 1 - (-1) = 2.$$

(Dodáme-li ovšem v (2) „Assumptions $\rightarrow a \geq 0 \wedge b \geq 0$ “, nula vyjde.)

Podobně je tomu (pro $a = b = -1$) s výrazem

$$(3) \quad \text{Log}[a b] - (\text{Log}[a] + \text{Log}[b]) = 0 - (i\pi + i\pi) = -2\pi i.$$

V reálném kalkulu se běžně užívá identita

$$(4) \quad \text{Sqrt}[a] \text{Sqrt}[b] = \text{Sqrt}[a b], \text{ má-li levá strana smysl,}$$

tedy v případě, že $a \geq 0$, $b \geq 0$ (ať již jsou a, b čísla, nebo funkce). Identitu (4) (a identity podobné, např. pro podíl) nelze samozřejmě užívat „zprava doleva“, což MATH bohužel často činí.

Příklad.

$$(5) \quad \text{Integrate}\left[\sqrt{\frac{x-1}{2-x}}, x\right] = \\ = \frac{\sqrt{\frac{1-x}{-2+x}} \left(\sqrt{1-x} \cdot (-2+x) - \sqrt{-2+x} \cdot \text{ArcTan}\frac{\sqrt{-2+x}}{\sqrt{1-x}} \right)}{\sqrt{1-x}};$$

primitivní funkce vlevo existuje jen v intervalu $(1, 2)$, vpravo je pět odmocnin ze záporných funkcí. Všimněme si hlavně nedovoleného rozkladu odmocniny podílu na podíl odmocnin. MATH přesto správně kreslí graf. (Vznikne z grafu funkce (6') posunutím o π dolů.)

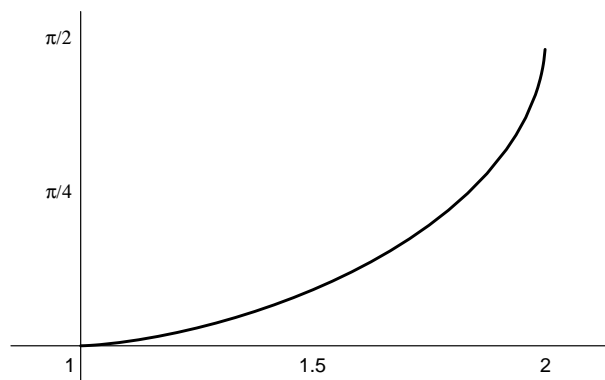
Aplikujeme-li na (5) „FullSimplify“, získáme výraz, který se od předchozího příliš neliší; přidáme-li však podmínku $1 < x < 2$, dostaneme

$$(6) \quad -\sqrt{-(-2+x)(-1+x)} - \text{ArcTan}\sqrt{-1 + \frac{1}{-1+x}},$$

co je výsledek po věcné stránce zcela správný. Dali bychom však asi přednost menšímu množství minusů v prvním výrazu a zlomku $(2-x)/(x-1)$ pod druhou z odmocnin. Standardním výpočtem dostaneme primitivní funkci

$$(6') \quad \text{ArcTan}\left[\sqrt{\frac{x-1}{2-x}}\right] - \sqrt{(x-1)(2-x)};$$

s politováním musím konstatovat, že derivaci této funkce MATH předkládá ve tvaru, který se mi nepodařilo žádným způsobem převést na $\sqrt{(x-1)/(2-x)}$. Domnívám se, že *hlavní překážkou je absence úprav typu (4)*.



GRAF FUNKCE (6')

Poznámka 1. MATH se ve svých verzích (úspěšně) snaží přidávat k výsledkům i obory jejich platnosti.

Příklad. Každý vysokoškolský učitel analýzy jistě vysoce ocení, že podle MATH je

$$(7) \quad \text{Integrate}[\text{Exp}[a x] \text{Sin}[b x], \{x, 0, \text{Infinity}\}] = \frac{b}{a^2 + b^2}, \quad \text{iff } b \in \text{Reals} \ \&\& \ \text{Re}[a] < 0,$$

protože se jedná o významný posun od bezmyšlenkovitého kalkulu k matematické analýze.

MATH dovede posoudit, jaké znaménko má daný výraz, a neměl by proto pro ni být problém, aby *sama přidala* do (5) dodatek „if $1 < x < 2$ “ a v souladu s tím zacházela s odmocninami. Brání jí v tom pravděpodobně snaha o platnost (5) i v komplexním oboru.

2. Absolutní hodnota a logaritmus

Je velká škoda, že MATH *neumí derivovat absolutní hodnotu*: Dokazuje to „rozpačitá“ rovnost

$$(8) \quad D[\text{Abs}[x], x] = \text{Abs}'[x]$$

a příčinou je *nehodná definice absolutní hodnoty*.*) Podle MATH je však

$$(9) \quad D[\text{Sqrt}[x^2], x] = \frac{x}{\sqrt{x^2}},$$

a kdyby se užívala definice

$$(10) \quad |x| := \sqrt{x^2} \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R},$$

byl by na pravé straně (9) výraz

$$(11) \quad \frac{x}{|x|} = \text{Sign}[x],$$

který má dobrý smysl *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$ *různá od nuly*, tedy právě pro ta x , pro něž platí identita

$$(12) \quad (|x|)' = \text{Sign}[x].$$

Je ovšem otázka, zdali zde nehraje opět neblahou úlohu snaha o slučování reálného a komplexního oboru, protože v komplexním oboru lze sice obecněji položit

$$(13) \quad |z| := \sqrt{\text{Re}^2 z + \text{Im}^2 z},$$

ale takto definovaná funkce nemá derivaci *podle komplexní proměnné* z nikde v \mathbb{C} .

*) Srov. se str. 134–135 a 138–139 vynikající knihy Wellin–Gaylord–Kamin: *An Introduction to Programming with Mathematica*.

* * *

S tímto problémem souvisí další, neméně důležitý problém: MATH píše

$$(14) \quad \text{Integrate}[1/x, x] = \text{Log}[x],$$

což je *neúplný výsledek*, protože pravá strana má (reálný) smysl jen pro $x > 0$, zatímco levá strana, spojitá i v \mathbb{R}_- , má i tam nějakou primitivní funkci. Správný, kompletní výsledek je

$$(15) \quad \text{Integrate}[1/x, x] = \text{Log}[|x|] \quad \text{v } \mathbb{R}_- \text{ a v } \mathbb{R}_+,$$

ale MATH jej ke své škodě neužívá – možná proto, že derivováním není schopna ověřit jeho správnost, možná proto, že v komplexní rovině, z níž je odstraněna nekladná část reálné osy, je výsledek (14) správný.

S neúplnou identitou (14) souvisí nekonečně mnoho dalších neúplných výsledků: Integrujeme-li logaritmickou derivaci f'/f funkce f , která je někde kladná, jinde záporná, dá nám MATH výsledek zpravidla jen tam, kde je $f > 0$.

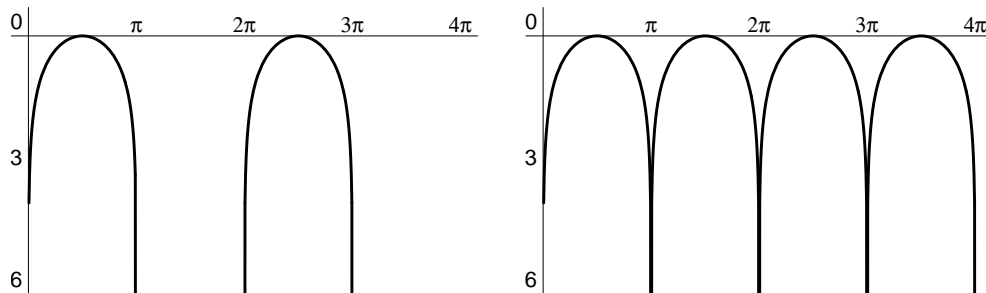
Příklad. Podle MATH je např.

$$(16) \quad \text{Integrate}[\text{Cot}[x], x] = \text{Log}[\text{Sin}[x]],$$

zatímco správný výsledek je

$$(17) \quad \text{Integrate}[\text{Cot}[x], x] = \text{Log}[|\text{Sin}[x]|].$$

Při pokusu nakreslit graf funkce (16) v intervalu $(0, 4\pi)$ pak MATH samozřejmě hlásí chyby a graf nakreslí jen v intervalech $(0, \pi)$ a $(2\pi, 3\pi)$.



GRAFY FUNKCÍ $\text{Log}[\text{Sin}[x]]$ A $\text{Log}[\text{Abs}[\text{Sin}[x]]]$

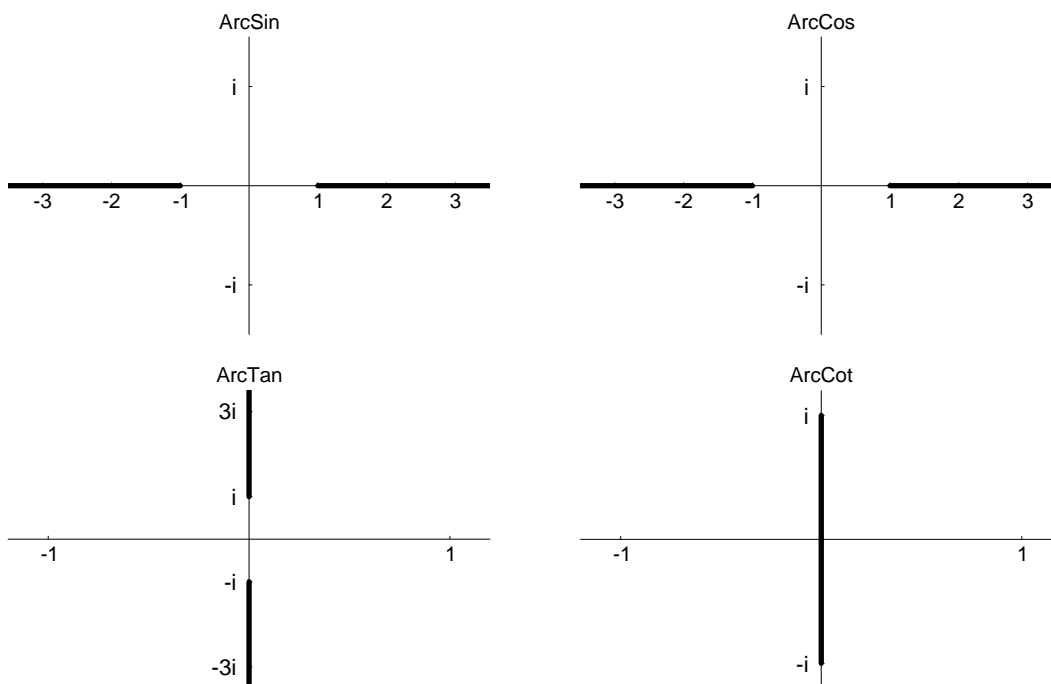
Poznámka 2. Někdo možná namítne, že absolutní hodnoty si každý (šťoura) může snadno dopsat. Proč bychom však měli vědomě psát neúplné výsledky, můžeme-li bez potíží napsat úplné? Navíc v případech, kdy primitivní funkci hledáme pomocí několika substitucí (a třeba i integrací per partes) a výsledek ještě upravujeme, nemusíme ex post vůbec poznat, kam absolutní hodnota patří. A co v případech, kdy MATH dává místo reálných řešení výsledky, v nichž jsou logaritmy nereálných, nebo záporných výrazů?

3. Funkce arkuskotangens: ArcCot a arccotg

Cyklometrické funkce arcsin, arccos, arctan a arccot jsou v komplexním oboru definovány jako inverzní analytické funkce funkcí Sin, Cos, Tan a Cot. Všechny čtyři jsou nekonečněznačné, ale podle věty o monodromii mají jednoznačné větve v jednoduše souvislých oblastech, v nichž jsou neomezeně pokračovatelné; arcsin a arccos jsou přitom neomezeně pokračovatelné v množině $\mathbb{C} - \{\pm 1\}$, funkce arctan a arccot v množině $\mathbb{S} - \{\pm i\}$. Větvi je nekonečně mnoho; vybere se jedna z nich a označí ArcSin, ..., ArcCot.

MATH volí jednoduše souvislé oblasti takto:

$$(18) \quad \begin{array}{ll} \text{ArcSin, ArcCos} & \Omega_1 := \mathbb{C} - ((-\infty, -1) \cup \langle 1, +\infty \rangle) \\ \text{ArcTan} & \Omega_2 := \mathbb{C} - ((-i\infty, -i) \cup \langle i, +i\infty \rangle) \\ \text{ArcCot} & \Omega_3 := \mathbb{S} - \langle -i, i \rangle \end{array}$$



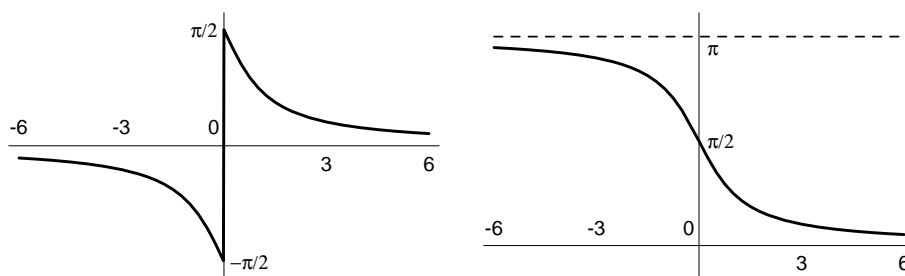
OBLASTI $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$

Na první pohled je patrná nesymetrie mezi první a druhou dvojicí funkcí; není zřejmé, proč se pro funkci ArcCot volí Ω_3 a ne Ω_2 . (Aby platila identita $\text{ArcTan } z = \text{ArcCot}(1/z)$?)

V každém případě to má *katastrofální následky* na reálné restrikce uvedených 4 větví, tedy na funkce, které užíváme v reálné analýze: Zatímco pro první tři funkce je MATH ve shodě s běžnými definicemi

$$(19) \quad \begin{aligned} \arcsin &:= (\sin | \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle)_{-1}, & \arccos &:= (\cos | \langle 0, \pi \rangle)_{-1}, \\ \text{arctg} &:= (\text{tg} | \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle)_{-1}, & \text{arccotg} &:= (\text{cotg} | \langle 0, \pi \rangle)_{-1}, \end{aligned}$$

je patrné, že v případě kotangenty nejsou definice stejné. Zatímco funkce (19) jsou spojitě a monotónní, o funkci ArcCot to neplatí – *není ani monotónní, ani spojitá*.



GRAF FUNKCE ARCCOT V MATH A VŠUDE JINDE

Zatímco

$$(20) \quad \arcsin + \arccos \equiv \frac{1}{2}\pi \quad \text{a} \quad \text{arctg} + \text{arccotg} \equiv \frac{1}{2}\pi,$$

druhá z identit pro funkce ArcTan a ArcCot *neplatí*. Uživateli přivyklému na běžnou definici arkuskotangenty nezbývá asi nic jiného, než nějak nazvat a definovat „svou“ funkci arkuskotangens – např. takto:

$$(21) \quad \text{ac}[x_-] := \frac{1}{2}\pi - \text{ArcTan}[x] \quad (\text{pro všechna } x \in \mathbb{R}).$$

Ve všech výpočtech a výsledcích se mu pak bude „ $\frac{1}{2}\pi$ “ plést.

Běžné funkce $\arcsin x$ a $\arccos x$ jsou primitivními funkcemi v $(-1, 1)$ funkcí $\pm 1/\sqrt{1-x^2}$; podobně jsou funkce $\operatorname{arctg} x$ a $\operatorname{arccotg} x$ primitivními funkcemi funkcí $\pm 1/(1+x^2)$ v \mathbb{R} . Funkce $\operatorname{ArcCot}[x]$ tuto vlastnost nemá např. proto, že není spojitá.

4. Primitivní funkce

MATH bohužel *nedodrží* ani jednu z těchto (zdravých) zásad reálné analýzy:

a) *Funkce primitivní (ke konečné funkci na intervalu) je spojitá.*

b) *Funkce primitivní k reálné funkci je reálná.*

Uveďme příklady:

A. Je-li

$$(22) \quad f[x_-] := \frac{2(2+x^2)}{4+x^4} \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R},$$

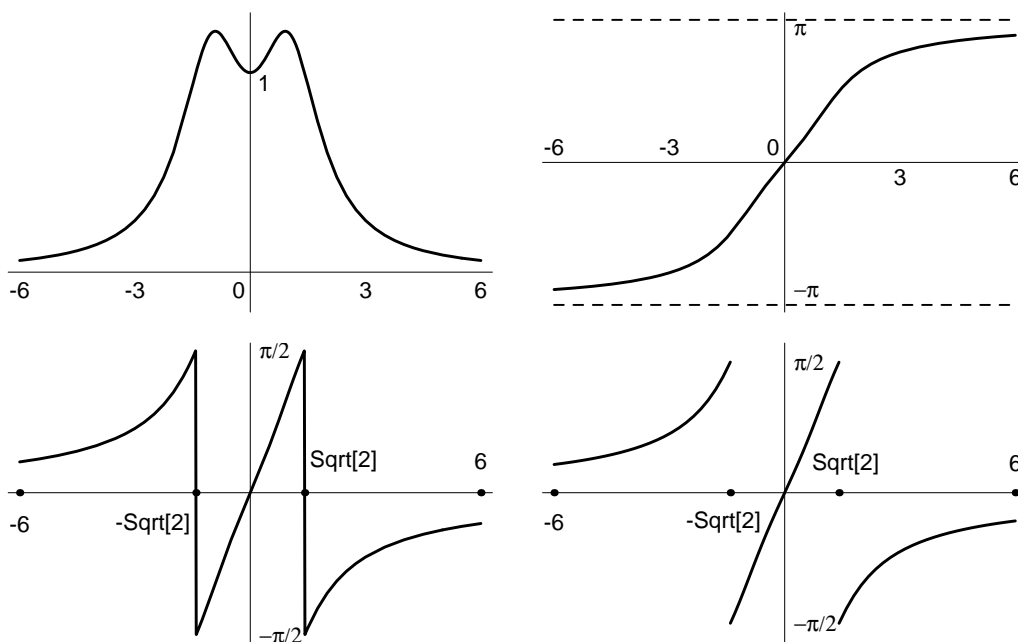
je podle MATH

$$(22') \quad \operatorname{Integrate}[f[x], x] = -\operatorname{ArcTan} \frac{2x}{-2+x^2},$$

přičemž funkce $f[x]$ je spojitá v \mathbb{R} , funkce vpravo nespojitá v bodech $\pm\sqrt{2}$. Správný výsledek přitom je

$$(22'') \quad \operatorname{ArcTan}[x+1] + \operatorname{ArcTan}[x-1];$$

(22') vzniklo asi užitím nevhodného vzorce.



1.Ř.: GRAFY FUNKCÍ $f[x]$ A (22'');

2.Ř.: GRAF FUNKCE (22') SE SVISLÝMI ÚSEČKAMI A BEZ NICH

Poznámka 3. Asi bychom dali přednost obrázkům, které nespojují jednostranné limity svislými úsečkami, protože *tyto úsečky nejsou součástí grafu*. Protože to nedělal např. program DERIVE z r. 1988, nemělo by to po technické stránce činit potíže ani v MATH.

B. Běžnými metodami lze sice získat jednoduchý výsledek

$$(23) \quad \operatorname{Integrate}\left[\frac{1}{\sqrt{2} + \sin x + \cos x}, x\right] = \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sin x + \cos x)}$$

(v intervalech tvaru $(2k\pi - \frac{3}{4}\pi, 2k\pi + \frac{5}{4}\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, ale MATH nabízí

$$(23') \quad \frac{-((1+3i) + \sqrt{2}) \operatorname{Cos}[x/2] + ((1+i) - i\sqrt{2}) \operatorname{Sin}[x/2]}{((1+i) + \sqrt{2}) \operatorname{Cos}[x/2] + i((-1-i) + \sqrt{2}) \operatorname{Sin}[x/2]},$$

což „FullSimplify“ upraví na tvar

$$(23'') \quad -\frac{(1+i) + (2i + \sqrt{2})e^{ix}}{(1+i) + \sqrt{2}e^{ix}}.$$

Graf ani jedné z funkcí (23') a (23'') přitom MATH nedovede nakreslit. Nám se naopak asi nebude chtít upravovat tyto výrazy tak, abychom se dověděli, zdali je to reálná funkce, nebo ne; namátkovým dosazováním hodnot (např. 0, $\frac{1}{2}\pi$, apod.) však zjistíme, že aspoň některé její hodnoty reálné nejsou.

Poznámka 4. Z tohoto příkladu je zřejmé, že MATH *nehledá primitivní funkce tradičními metodami reálného kalkulu*, tj. substitucí

$$(*) \quad \operatorname{Tan}[\frac{1}{2}x] = t \quad \text{nebo} \quad \operatorname{Cot}[\frac{1}{2}x] = t.$$

Pravděpodobně nevyužívá ani substitucí

$$(**) \quad \operatorname{Sin}[x] = t \quad \text{resp.} \quad \operatorname{Cos}[x] = t,$$

které mají v dobře známých situacích tu výhodou, že vzniklá racionální funkce má ve jmenovateli polynom polovičního stupně v porovnání se substitucemi (*). Zdá se to napovídat následující příklad.

C. Někdy se stane, že MATH nedá žádný použitelný výsledek, i když „klasickými metodami“ kalkulu lze primitivní funkci získat v několika málo krocích. Je-li např.

$$(24) \quad f[x_-] := \frac{4\sqrt{2} \operatorname{Cos}[x]}{\operatorname{Cos}[x]^4 + \operatorname{Sin}[x]^4},$$

vede substituce $\operatorname{Sin}[x] = y$ k výrazu

$$(25) \quad \frac{4\sqrt{2}}{1 - 2y^2 + 2y^4},$$

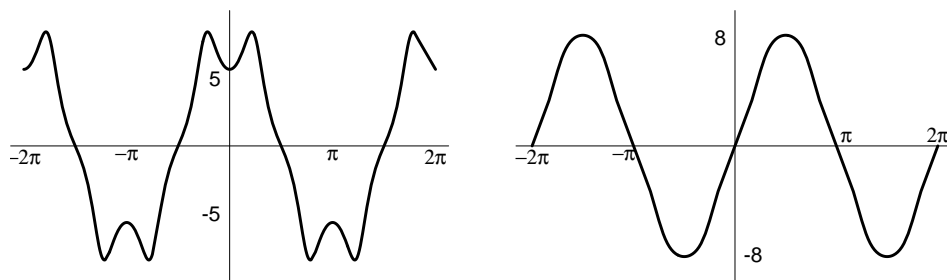
který má smysl v celém \mathbb{R} a který lze celkem snadno integrovat. Dostaneme funkci

$$(26) \quad 2a(\operatorname{ArcTan}[a^2 + 2ay] - \operatorname{ArcTan}[a^2 - 2ay]) + \frac{1}{a} \operatorname{Log}\left[\frac{\sqrt{2}y^2 + \sqrt{2}ay + 1}{\sqrt{2}y^2 - \sqrt{2}ay + 1}\right],$$

kde $a := (\sqrt{2} + 1)^{1/2}$, a stačí dosadit $y = \operatorname{Sin}[x]$, abychom získali funkci primitivní k (24) v celém \mathbb{R} .

MATH bohužel (i po „FullSimplify“) nabízí jen výraz

$$(26') \quad \sqrt{2} \operatorname{RootSum}[1 + 6\#1^4 + \#1^8 \&, \\ \frac{1}{3\#1 + \#1^5} (2 \operatorname{ArcCot}[\operatorname{Cot}[x] - \operatorname{Csc}[x]\#1] - i \operatorname{Log}[-1 + 2 \operatorname{Cos}[x]\#1 - \#1^2]) \\ + \text{výraz podobný předcházející řádce \&].$$



GRAF FUNKCE (24) A (26) (PO DOSAZENÍ $y = \operatorname{Sin}[x]$)

* * *

Při integraci racionální funkce v sinu a kosinu, spojitě v celém \mathbb{R} , vzniká problém, který bohužel MATH neřeší, ačkoli daleko primitivnější a starší program DERIVE jej již v roce 1988 zvládl: Příslušná primitivní funkce by měla být (definována a) spojitá také v celém \mathbb{R} , ale substituci $\text{Tan}[\frac{1}{2}x] = t$ lze užít jen v intervalech tvaru $(\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. MATH (na rozdíl od DERIVE) *neumí příslušná parciální řešení „slepit“*.

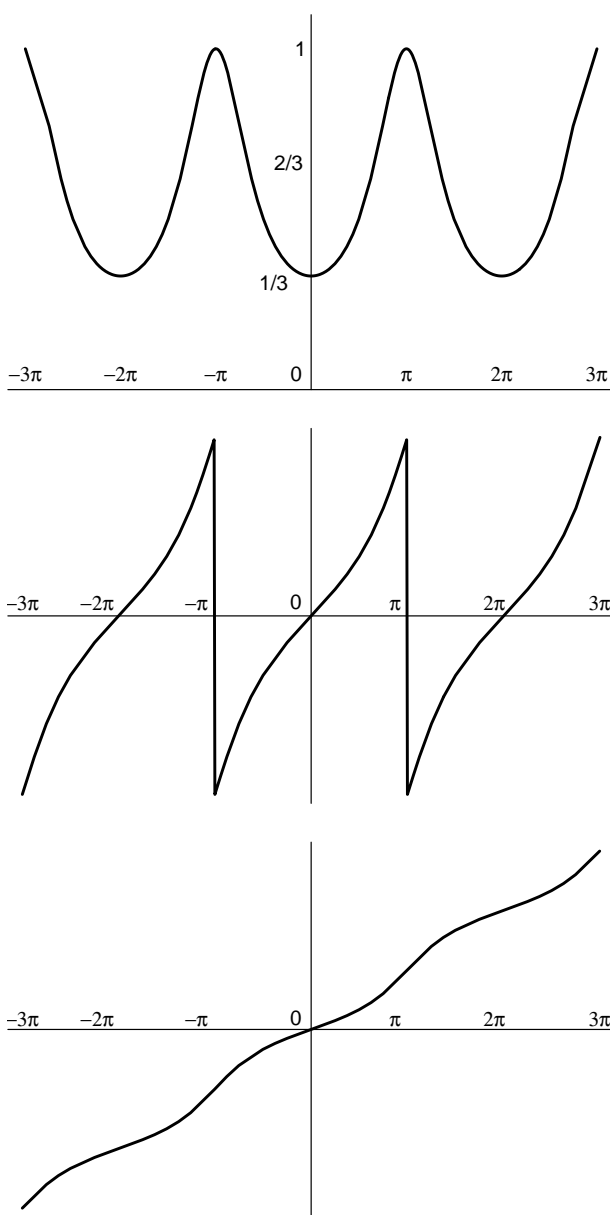
Příklad.

$$(27) \quad \text{Integrate}\left[\frac{1}{2 + \text{Cos}[x]}, x\right] = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ArcTan}\left[\frac{1}{\sqrt{3}} \text{Tan}\left[\frac{1}{2}x\right]\right]$$

není definována v lichých násobcích π a nemá v nich ani limitu. DERIVE nabízí funkci

$$(28) \quad \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\pi \text{Floor}\left[\frac{x + \pi}{2\pi}\right] + \text{ArcTan}\left[\frac{1}{\sqrt{3}} \text{Tan}\left[\frac{1}{2}x\right]\right] \right),$$

která sice také není definována všude, ale v lichých násobcích π má limitu (takže ji lze spojitě rozšířit); absence hodnot v těchto bodech však zřejmě nebrání správnému nakreslení grafu.



GRAF FUNKCE $\frac{1}{2 + \text{Cos}[x]}$ A JEJÍ PRIMITIVNÍ FUNKCE V MATH A V DERIVE