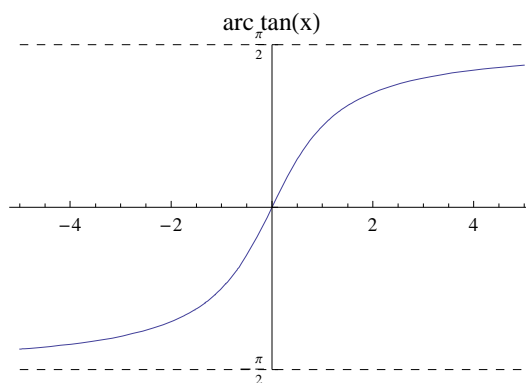
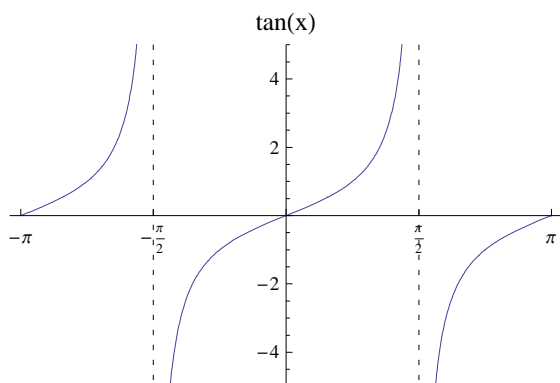

Určete D (f) funkce $f(x) = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{\log(x - 1)} + \frac{1 - \log(x + 3)}{\arctan(x - 3)}$

Podmínky

$$\begin{array}{lllll}
 16 - x^2 \geq 0 & \log(x - 1) \neq 0 & x - 1 > 0 & x + 3 > 0 & \arctan(x - 3) \neq 0 \\
 16 \geq x^2 & \log(x - 1) \neq \log 1 & [x > 1] & [x > -3] & [x \neq 3] \\
 x \leq \pm 4 & x - 1 \neq 1 & & & \\
 x \in \langle -4; 4 \rangle & [x \neq 2] & & &
 \end{array}$$



$$D(f) = \langle -4; 4 \rangle \cup \{x \neq 2\} \cup (1; \infty) \cup (-3; \infty) \cup \{x \neq 3\}$$

$$D(f) = (1; 2) \cup (2; 3) \cup (3; 4)$$

Určete D (f) funkce $f(x) = \sqrt{\frac{x + 5}{x - 3}} + \ln(4 - x^2)$

Podmínky

$$\begin{array}{lll}
 \frac{x + 5}{x - 3} \geq 0 & x - 3 \neq 0 & 4 - x^2 > 0 \\
 \text{nulové body} & [x \neq 3] & 4 > x^2 \\
 -5; 3 & & x < \pm 2 \\
 x \in (-\infty; -5) \cup (3; \infty) & & x \in (-2; 2)
 \end{array}$$



$$D(f) = (-\infty; -5) \cup (3; \infty) \cup \{x \neq 3\} \cup (-2; 2)$$

$$D(f) = \emptyset$$

Určete D (f) funkce $f(x, y) =$

$$\sqrt{\frac{4 - 2x - y}{2y + x + 4}} + \log(x^2 + 4x + y^2 - 4y + 4)$$

Podmínky

$$\frac{4 - 2x - y}{2y + x + 4} \geq 0$$

$$2y + x + 4 \neq 0$$

$$x^2 + 4x + y^2 - 4y + 4 > 0$$

nulové křivky

● $y = 4 - 2x$ (přímka)

● $2y = -4 - x$

$y = -2 - \frac{x}{2}$ (přímka)

$$[(x^2 + 4x + 4) - 4] + [(y^2 - 4y + 4) - 4] + 4 > 0$$

$$(x + 2)^2 + (y - 2)^2 - 4 > 0$$

$$(x + 2)^2 + (y - 2)^2 > 4$$

$$(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4 \text{ (kružnice)}$$

Přímka $y = 4 - 2x$:

$x = 0 \Rightarrow y = 4$ [0; 4]

$x = 2 \Rightarrow y = 0$ [2; 0]

Do grafu patří

Přímka $y = -2 - \frac{x}{2}$:

$x = 2 \Rightarrow y = -3$ [2; -3]

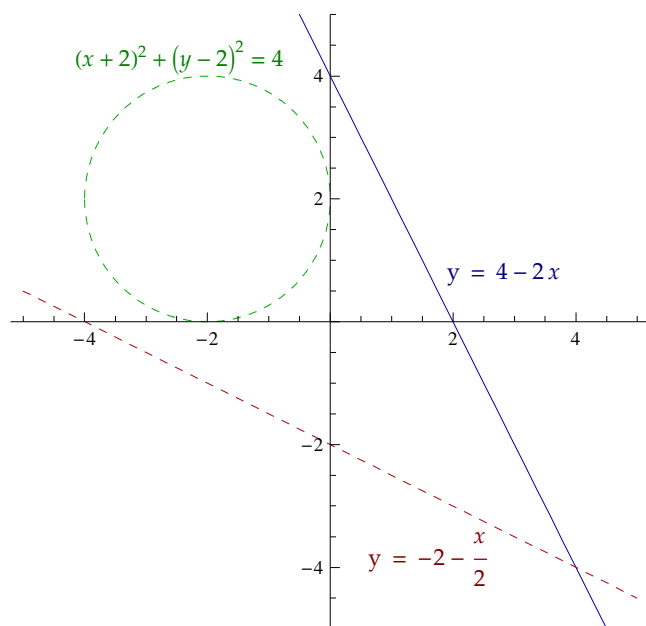
$x = -4 \Rightarrow y = 0$ [-4; 0]

Do grafu nepatří kvůli 2. podmínce

Kružnice $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$:

$r = 2, S[-2; 2]$

Do grafu nepatří kvůli 3. podmínce



Z jednotlivých oblastí vybereme bod a dosadíme do příslušné podmínky. Bude-li výsledek podmínky vyhovovat, daná oblast do definičního oboru patří.

bod [-1; 1]

$$(-1)^2 + 4 \cdot (-1)^2 + 1^2 - 4 \cdot 1 + 4 > 0$$

$-2 \neq 0$ podmínce nevyhovuje \Rightarrow **oblast do grafu nepatří**

bod [1; 1]

$$\frac{4-2 \cdot 1-1}{2 \cdot 1+1+4} \geq 0$$

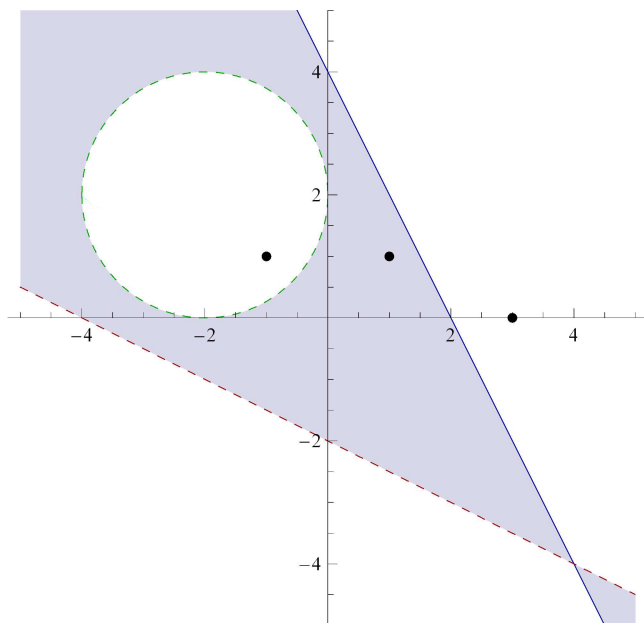
$\frac{1}{7} \geq 0$ podmínce vyhovuje \Rightarrow **oblast do grafu patří**

bod [3; 0]

$$\frac{4-2 \cdot 3-0}{2 \cdot 0+3+4} \geq 0$$

$-\frac{2}{7} \neq 0$ podmínce nevyhovuje \Rightarrow **oblast do grafu nepatří**

atd.



Najděte inverzní funkci k $f(x) = 2 + \sqrt{x-3}$ a určete $D(f^{-1})$ a $H(f^{-1})$

Podmínky

$$x - 3 \geq 0$$

$$[x \geq 3]$$

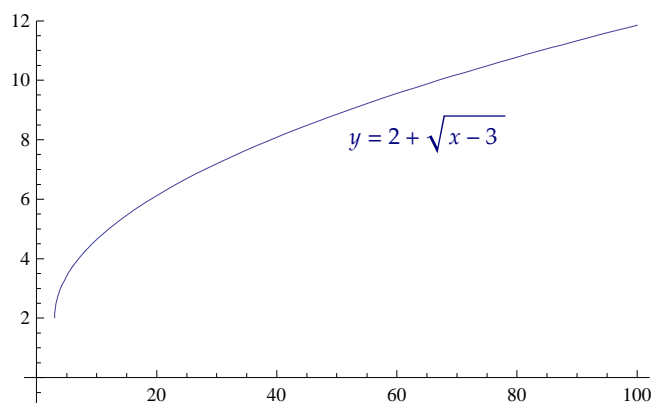
$$D(f) = H(f^{-1}) = \langle 3; \infty \rangle$$

Funkce, kterou počítáme má takovýto průběh

$$y - 2 \geq 0$$

$$[y \geq 2]$$

$$H(f) = D(f^{-1}) = \langle 2; \infty \rangle$$



Vyjádříme ze zadání neznámou x a získáme tak inverzní funkci

$$y = 2 + \sqrt{x - 3}$$

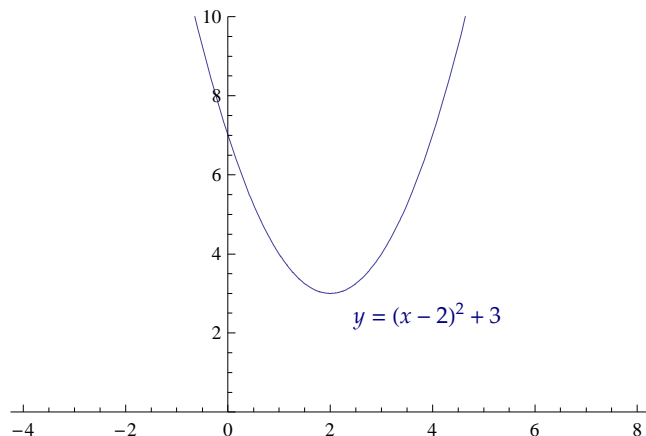
$$y - 2 = \sqrt{x - 3}$$

$$(y - 2)^2 = x - 3$$

$$x = (y - 2)^2 + 3$$

Prohodíme neznámé, aby zápis odpovídal konvencím

$$f^{-1}(x) : y = (x - 2)^2 + 3$$



Na vhodném intervalu najděte inverzní funkci k $f(x) =$

$$5 - \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \text{ a určete } D(f^{-1}) \text{ a } H(f^{-1})$$

Funkce není prostá na celém definičním oboru, proto si zvolím takový interval, na kterém prostá bude: $0 \leq \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \leq \pi$

Prostá funkce: každému x musí být přiřazeno jedinečné y , nemůže se stát, že by pro dvě různá x byla stejná funkční hodnota.

Podmínky

$$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \geq 0$$

$$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \leq \pi$$

$$\frac{x}{2} \geq \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{x}{2} \leq \pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\left[x \geq \frac{\pi}{3} \right]$$

$$\frac{x}{2} \leq \frac{7\pi}{6}$$

$$\left[x \leq \frac{7\pi}{3} \right]$$

$$\Rightarrow D(f) = H(f^{-1}) = \left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{3} \right\rangle$$

Vyjádříme ze zadání neznámou x a získáme tak inverzní funkci

$$y = 5 - \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$y - 5 = -\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$5 - y = \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\arccos(5 - y) = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}$$

$$\arccos(5 - y) + \frac{\pi}{6} = \frac{x}{2}$$

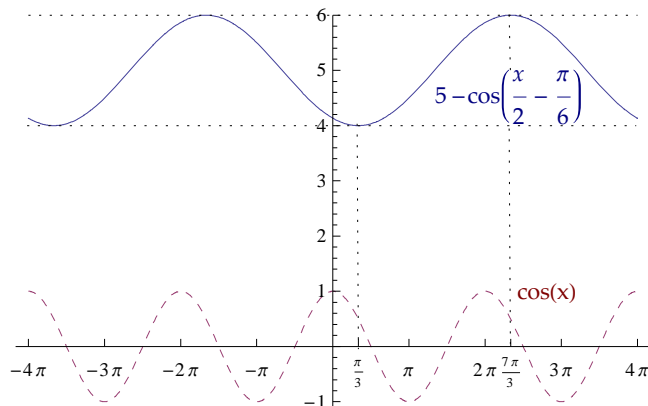
$$x = 2 \cdot \left(\arccos(5 - y) + \frac{\pi}{6} \right)$$

Prohodíme neznámé, aby zápis odpovídal konvencím

$$f^{-1}(x) : y = 2 \cdot \arccos(5 - x) + \frac{\pi}{3}$$

$$H(f) = D(f^{-1}) = \langle 4; 6 \rangle$$

To je vidět z grafu: \cos má $H(f)$ na $\langle -1; 1 \rangle$ a zde je graf posunutý o 5 nahoru ... tedy na $\langle 4; 6 \rangle$



Určete rovnice asymptot grafu funkce $f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 5}{x}$

Podmínky

$$[x \neq 0]$$

V tomto bodě by se mohla nacházet svislá asymptota ... Dokážeme to tak,

zjistíme limitu funkce v tomto bodě, tj v bodě 0 (respektive v 0^+ nebo v 0^- , stačí si vybrat jeden případ)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2 + 2x - 5}{x} = \frac{-5}{0^+} = -\infty$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x^2 + 2x - 5}{x} = \frac{-5}{0^-} = +\infty \text{ stačí vždy ověřit jen z jedné strany} \right)$$

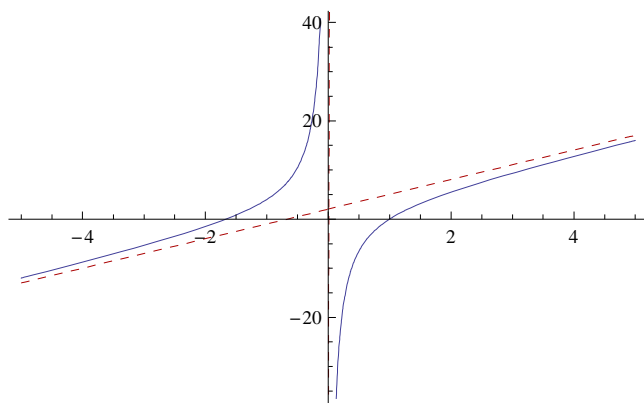
Limita jde vždy k nekonečnu \Rightarrow v tomto bodě **asymptota** skutečně je a má předpis $x = 0$

Nyní zjistíme, zda má funkce ještě nějaké asymptoty

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{3x^2 + 2x - 5}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 + 2x - 5}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} - \frac{5}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}}{1} = 3$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - k \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x^2 + 2x - 5}{x} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 + 2x - 5 - 3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - 5}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 - \frac{5}{x}}{1} = 2$$

Druhá **asymptota** má předpis $y = 3x + 2$



Určete rovnice asymptot grafu funkce $f(x) = x - 3 \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x + 1) + \frac{1}{x}$

Podmínky

$[x \neq 0]$

V tomto bodě by se mohla nacházet svislá asymptota ... Dokážeme to tak, zjistíme limitu funkce v tomto bodě, tj v bodě 0 (respektive v 0^+ nebo v 0^- , stačí si vybrat jeden případ)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - 3 \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x + 1) + \frac{1}{x} \right) = -\frac{3\pi}{4} + \infty = \infty$$

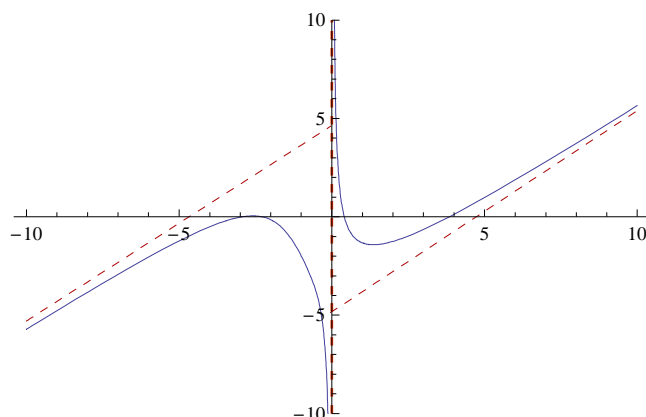
Limita jde k nekonečnu \Rightarrow v tomto bodě asymptota skutečně je a má předpis $x = 0$

Nyní zjistíme, zda má funkce ještě nějaké asymptoty

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x - 3 \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x + 1) + \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 - \frac{3 \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x + 1)}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = 1 - 0 + 0 = 1$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - k \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x - 3 \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x + 1) + \frac{1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-3 \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x + 1) + \frac{1}{x} \right) = 0 \pm \frac{3\pi}{2} = \pm \frac{3\pi}{2}$$

Druhá a třetí **asymptota** mají předpis $y = x + \frac{3\pi}{2}$ a $y = x - \frac{3\pi}{2}$



Napište rovnici tečné roviny k rovině $z =$

$$\ln \sqrt{9x^2 - 2y^3} \text{ v bodě } T[1; -2; ?]$$

Vypočteme třetí souřadnici bodu T (dosadíme do rovnice známé souřadnice bodu T)

$$\ln \sqrt{9 \cdot 1 - 2 \cdot (-2)^3} = \ln \sqrt{9 + 16} = \ln 5 \Rightarrow T[1; -2; \ln 5]$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{9x^2 - 2y^3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{9x^2 - 2y^3}} \cdot 18x = \frac{1}{\sqrt{9x^2 - 2y^3}} \cdot \frac{9x}{\sqrt{9x^2 - 2y^3}} = \frac{9x}{9x^2 - 2y^3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(T) = \frac{9x}{9x^2 - 2y^3} (1; -2) = \frac{9 \cdot 1}{9 \cdot 1^2 - 2 \cdot (-2)^3} = \frac{9}{9 + 16} = \frac{9}{25}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{9x^2 - 2y^3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{9x^2 - 2y^3}} \cdot (-6y^2) = \frac{1}{\sqrt{9x^2 - 2y^3}} \cdot \frac{-3y^2}{\sqrt{9x^2 - 2y^3}} = -\frac{3y^2}{9x^2 - 2y^3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(T) = -\frac{3y^2}{9x^2 - 2y^3} (1; -2) = \frac{3 \cdot (-2)^2}{9 \cdot 1^2 - 2 \cdot (-2)^3} = \frac{-12}{9 + 16} = -\frac{12}{25}$$

$$\text{Normálový vektor tečné roviny: } \vec{n} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}(T), \frac{\partial z}{\partial y}(T), -1 \right)$$

$$\vec{n} = \left(\frac{9}{25}, -\frac{12}{25}, -1 \right)$$

Vynásobíme – li vektor libovolným číslem,

vektor se nezmění. Pro snazší počítání si normálový vektor vynásobíme číslem 25

$$\vec{n} = (9, -12, -25)$$

$$\text{Obecná rovnice roviny: } ax + by + cz + d = 0, \text{ kde } a, b, c \in \vec{n} = (a, b, c) \text{ a } x, y, z \in T[x; y; z]$$

$$z: 9x - 12y - 25z + d = 0$$

Vypočítáme **d**

$$T \in y: 9 \cdot 1 - 12 \cdot (-2) - 25 \cdot \ln 5 + d = 0$$

$$9 + 24 - 25 \ln 5 = -d$$

$$\mathbf{d = 25 \ln 5 - 33}$$

$$\mathbf{z: 9x - 12y - 25z + 25 \ln 5 - 33 = 0}$$

$$\text{Parametrická rovnice přímky (normály): } x = x + a \cdot t$$

$$y = y + b \cdot t$$

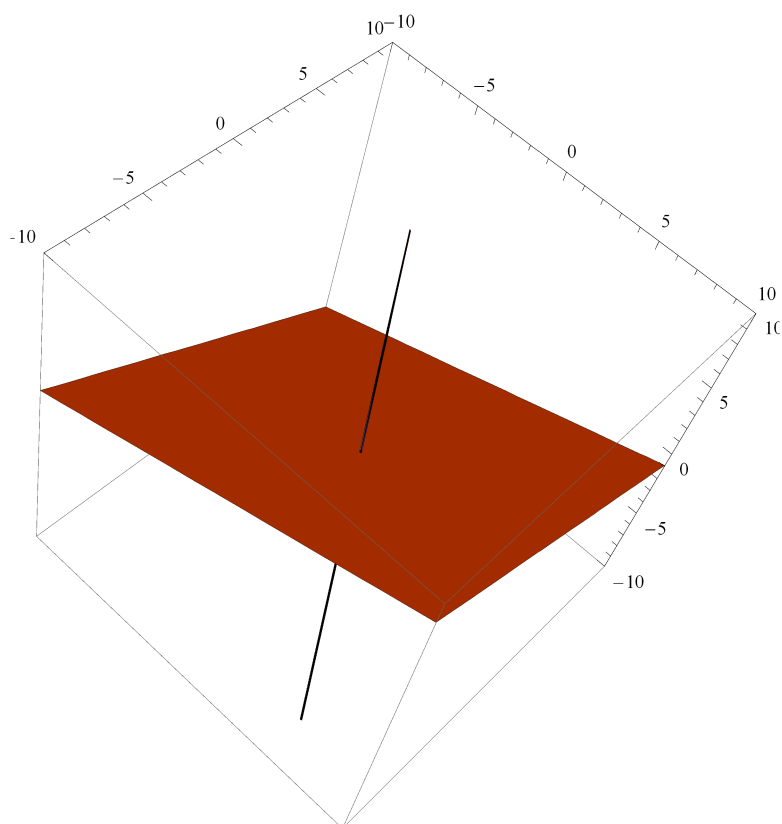
$$z = z + c \cdot t$$

, kde $a, b, c \in \vec{n} = (a, b, c)$ a $x, y, z \in T[x; y; z]$

$$\mathbf{x = 1 + 9t}$$

$$\mathbf{y = -2 - 12t}$$

$$\mathbf{z = \ln 5 - 25t}$$



Určete monotónost a extrémů funkce $f(x) = \arctg \frac{3-x}{x^2}$

Podmínky

$[x \neq 0]$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{3-x}{x^2}\right)^2} \cdot \frac{-x^2 - (3-x)2x}{x^4} = \frac{1}{1 + \frac{(3-x)^2}{x^4}} \cdot \frac{x^2 - 6x}{x^4} = \frac{x^2 - 6x}{x^4 + (3-x)^2}$$

Z čitatele určíme nulové body, tzn. postavíme ho rovný 0

$$x^2 - 6x = 0$$

$$x(x-6) = 0$$

● $x = 0$

● $x = 6$

nulové body : 0; 6

Na začátku nám ale vyšla podmínka, že $x \neq 0$

Vytvoříme tedy jednotlivé intervaly podle nulových bodů

● $(-\infty; 0)$

● $(0; 6)$

● $(6; \infty)$

Z každého intervalu si vybereme libovolné číslo a dosadíme ho $f'(x)$. Pokud je výsledek

$f'(x) > 0$ funkce je na tomto intervalu **rostoucí**

$f'(x) < 0$ funkce je na tomto intervalu **klesající**

$$f'(-1) = \frac{(-1)^2 - 6 \cdot (-1)}{(-1)^4 + (3 - (-1))^2} = \frac{7}{17} > 0 \text{ rostoucí}$$

$$f'(1) = \frac{1^2 - 6 \cdot 1}{1^4 + (3 - 1)^2} = -1 < 0 \text{ klesající}$$

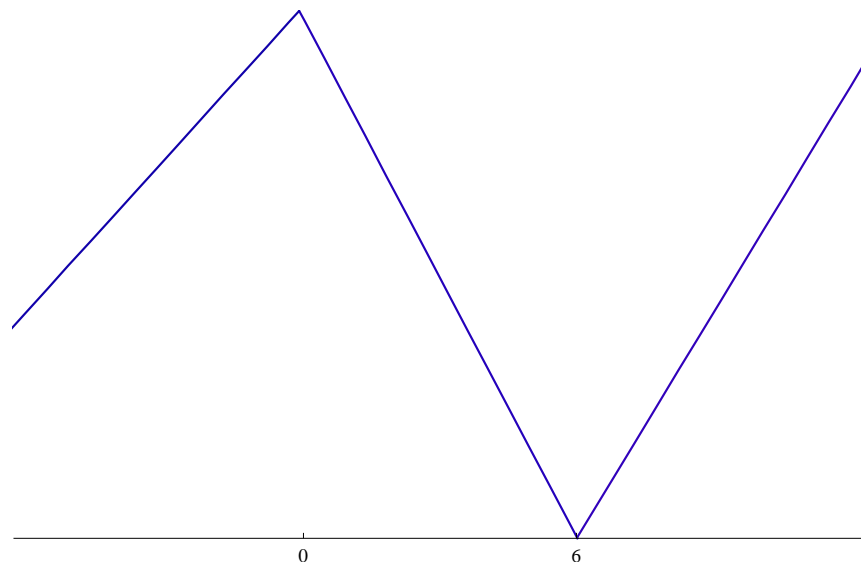
$$f'(9) = \frac{9^2 - 6 \cdot 9}{9^4 + (3 - 9)^2} = \frac{3}{733} > 0 \text{ rostoucí}$$

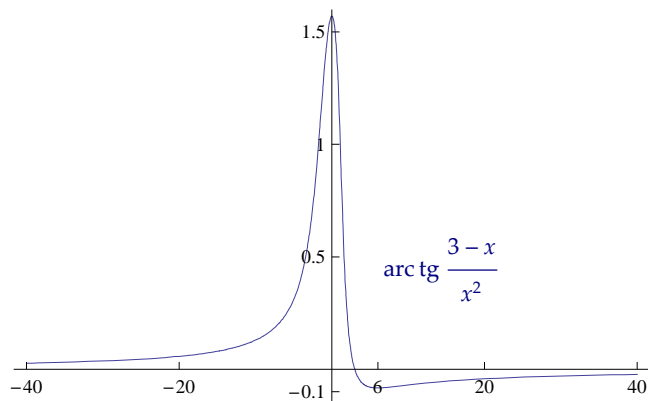
$(-\infty; 0)$ $f'(x) > 0$ **rostoucí**

$(0; 6)$ $f'(x) < 0$ **klesající**

$(6; \infty)$ $f'(x) > 0$ **rostoucí**

Když si funkci jednoduše představíme, poznáme, že v bodě 6 má minimum.





Určete Taylorův rozvoj 3. stupně funkce $f(x) = x \cdot e^{2-x}$ v bodě $a = 2$

Vypočítáme funkční hodnotu v bodě 2

$$f(2) = 2 \cdot e^{2-2} = 2$$

Chceme Taylorův rozvoj 3. stupně,

tzn. provedeme derivace do třetího řádu a vždy vypočítáme funkční hodnotu v bodě 2

$$f'(x) = e^{2-x} + x e^{2-x} \cdot (-1) = e^{2-x} - x e^{2-x}$$

$$f'(2) = 1 - 2 \cdot 1 = -1$$

$$f''(x) = -e^{2-x} - e^{2-x} + x e^{2-x}$$

$$f''(2) = -1 - 1 + 2 = 0$$

$$f'''(x) = e^{2-x} + e^{2-x} + e^{2-x} + x e^{2-x} \cdot (-1) = 3 e^{2-x} - x e^{2-x}$$

$$f'''(2) = 3 - 2 = 1$$

Pak už jen dosadíme do vzorce pro Taylorův polynom

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} (x-a)^3 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!} (x-a)^n + R_n$$

$$x \cdot e^{2-x} = 2 - 1(x-2) + \frac{1}{6}(x-2)^3 = 2 - x + 2 + \frac{(x-2)^3}{6} = 4 - x + \frac{(x-2)^3}{6}$$

$$x \cdot e^{2-x} = 4 - x + \frac{(x-2)^3}{6}$$

Taylorův polynom

