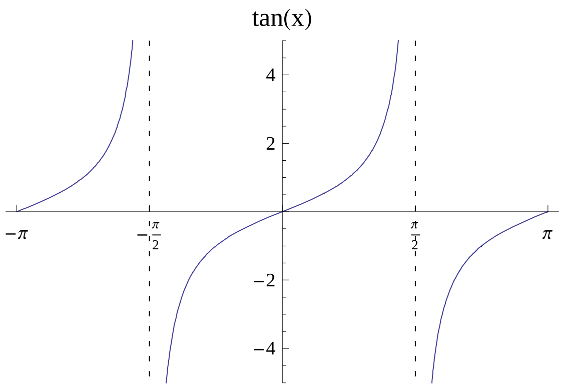
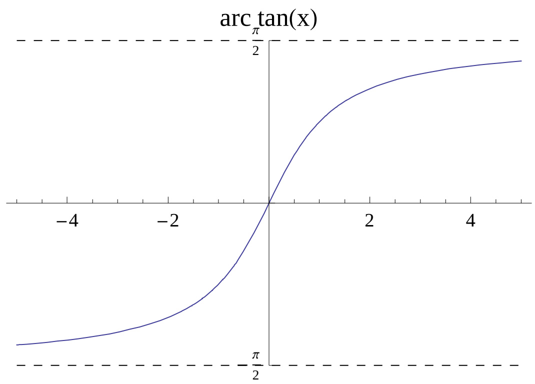
Určete D (f) funkce $f(x) = \dfrac{\sqrt{16 - x^2}}{\log(x-1)} + \dfrac{1 - \log(x+3)}{\operatorname{arc\,tan}(x-3)}$

Podmínky

$16 - x^2 \geq 0$	$\log(x-1) \neq 0$	$x - 1 > 0$	$x + 3 > 0$	$\operatorname{arc\,tg}(x-3) \neq 0$
$16 \geq x^2$	$\log(x-1) \neq \log 1$	**$[x > 1]$**	**$[x > -3]$**	**$[x \neq 3]$**
$x \leq \pm 4$	$x - 1 \neq 1$			
$x \in \langle -4; 4\rangle$	**$[x \neq 2]$**			





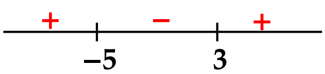
$D(f) = \langle -4; 4\rangle \cup \{x \neq 2\} \cup (1; \infty) \cup (-3; \infty) \cup \{x \neq 3\}$

$D(f) = (1; 2) \cup (2; 3) \cup (3; 4)$

Určete D (f) funkce $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+5}{x-3}} + \ln\left(4 - x^2\right)$

Podmínky

$\dfrac{x+5}{x-3} \geq 0$	$x - 3 \neq 0$	$4 - x^2 > 0$
nulové body	**$[x \neq 3]$**	$4 > x^2$
$-5;\ 3$		$x < \pm 2$
$x \in (-\infty; -5\rangle \cup \langle 3; \infty)$		**$x \in (-2; 2)$**



$D(f) = (-\infty; -5\rangle \cup \langle 3; \infty) \cup \{x \neq 3\} \cup (-2; 2)$

$D(f) = \emptyset$

Určete D (f) funkce f (x, y) =

$$\sqrt{\frac{4-2x-y}{2y+x+4}}+\log\left(x^2+4x+y^2-4y+4\right)$$

<u>Podmínky</u>

$\frac{4-2x-y}{2y+x+4}\geq 0$ $\quad 2y+x+4\neq 0$ $\quad x^2+4x+y^2-4y+4>0$

nulové křivky

- $y=4-2x$ (přímka)
- $2y=-4-x$

  $y=-2-\frac{x}{2}$ (přímka)

$$\left[\left(x^2+4x+4\right)-4\right]+\left[\left\{y^2-4y+4\right\}-4\right]+4>0$$

$$(x+2)^2+(y-2)^2-4>0$$

$$(x+2)^2+(y-2)^2>4$$

$$(x+2)^2+(y-2)^2=4\ \text{(kružnice)}$$

Přímka y = 4 - 2 x:

$x=0\Rightarrow y=4$ [0; 4]

$x=2\Rightarrow y=0$ [2; 0]

Do grafu patří

Přímka $y=-2-\frac{x}{2}$:

$x=2\Rightarrow y=-3$ [2; -3]

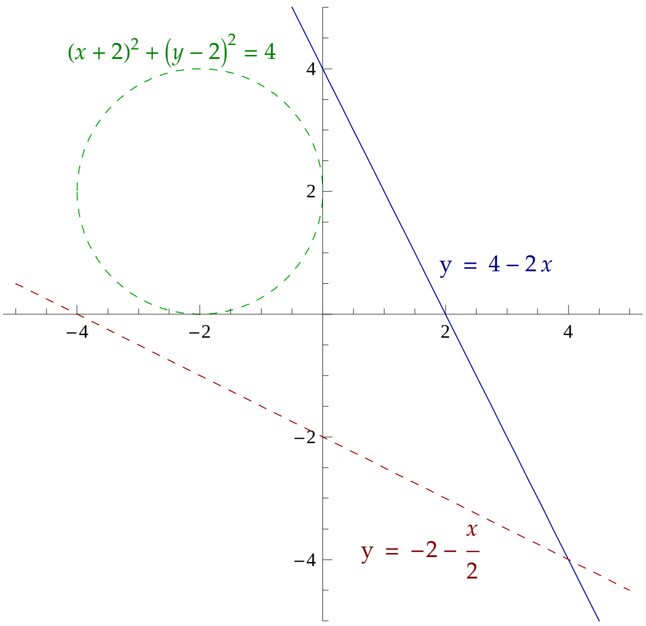
$x=-4\Rightarrow y=0$ [-4; 0]

Do grafu nepatří kvůli 2. podmínce

Kružnice $(x+2)^2+(y-2)^2=4$:

r = 2, S[-2; 2]

Do grafu nepatří kvůli 3. podmínce



Z jednotlivých oblastí vybereme bod a dosadíme do příslušné podmínky. Bude-li výsledek podmínce vyhovovat, daná ovlast do definičního oboru patří.

bod [-1; 1]
$(-1)^2 + 4.(-1)^2 + 1^2 - 4.1 + 4 > 0$

$-2 \ngtr 0$ podmínce nevyhovuje $\Rightarrow$ **oblast do grafu nepatří**

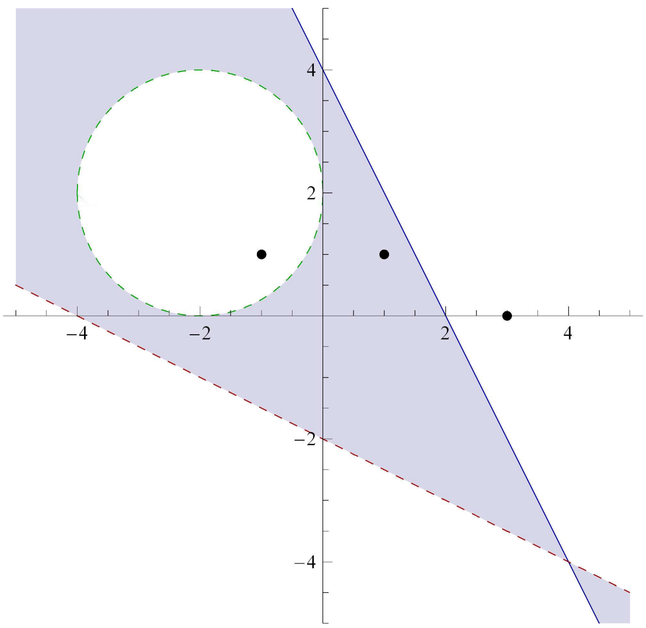
bod [1; 1]
$\frac{4-2.1-1}{2.1+1+4} \geq 0$

$\frac{1}{7} \geq 0$ podmínce vyhovuje $\Rightarrow$ **oblast do grafu patří**

bod [3; 0]
$\frac{4-2.3-0}{2.0+3+4} \geq 0$

$-\frac{2}{7} \ngeq 0$ podmínce nevyhovuje $\Rightarrow$ **oblast do grafu nepatří**

atd.



Najděte inverzní funkci k $f(x) = 2 + \sqrt{x - 3}$ a určete $D(f^{-1})$ a $H(f^{-1})$

Podmínky

$x - 3 \geq 0$

[x ≥ 3]

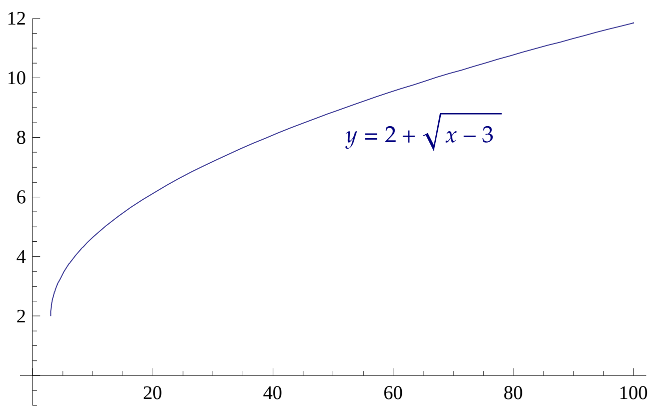
$\mathbf{D(f) = H(f^{-1}) = \langle 3;\ \infty)}$

Funkce, kterou počítáme má takovýto průběh

$y - 2 \geq 0$

[y ≥ 2]

$\mathbf{H(f) = D(f^{-1}) = \langle 2;\ \infty)}$



Vyjádříme ze zadání neznámou *x* a získáme tak inverzní funkci

$y = 2 + \sqrt{x - 3}$

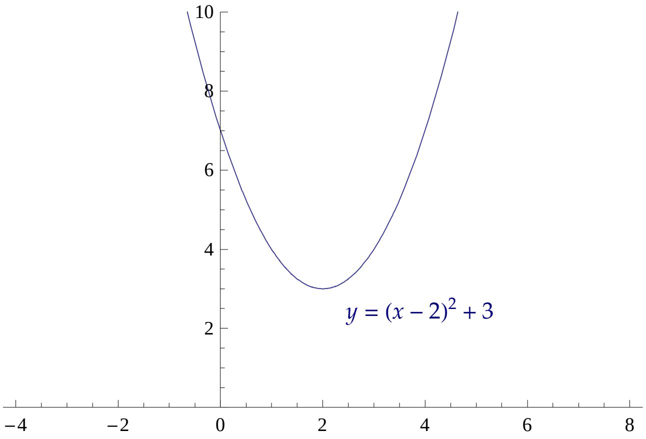
$y - 2 = \sqrt{x - 3}$

$(y - 2)^2 = x - 3$

$\mathbf{x = (y - 2)^2 + 3}$

Prohodíme neznámé, aby zápis odpovídal konvencím

$\mathbf{f^{-1}(x) : \; y = (x - 2)^2 + 3}$



Na vhodném intervalu najděte inverzní funkci k $f(x) = 5 - \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$ a určete $D\left(f^{-1}\right)$ a $H\left(f^{-1}\right)$

Funkce není prostá na celém definičním oboru, proto si zvolím takový interval, na kterém prostá bude: $0 \le \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \le \pi$

<u>Prostá funkce:</u> každému x musí být přiřazeno jedinečné y, nemůže se stát, že by pro dvě různá x byla stejná funkční hodnota.

<u>Podmínky</u>

$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \ge 0$

$\frac{x}{2} \ge \frac{\pi}{6}$

$\left[\mathbf{x \ge \frac{\pi}{3}}\right]$

$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \le \pi$

$\frac{x}{2} \le \pi + \frac{\pi}{6}$

$\frac{x}{2} \le \frac{7\pi}{6}$

$\left[\mathbf{x \le \frac{7\pi}{3}}\right]$

$\Rightarrow \mathbf{D(f) = H\left(f^{-1}\right) = \left\langle \frac{\pi}{3}; \; \frac{7\pi}{3} \right\rangle}$

Vyjádříme ze zadání neznámou *x* a získáme tak inverzní funkci

$y = 5 - \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$

$y - 5 = -\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$

$5 - y = \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$

$\arccos(5 - y) = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}$

$\arccos(5 - y) + \frac{\pi}{6} = \frac{x}{2}$

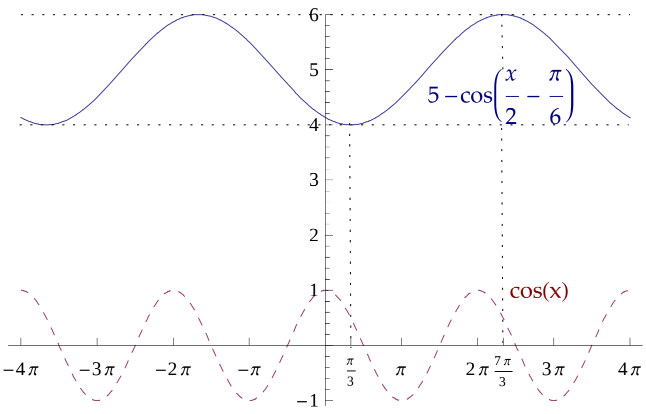
$x = 2.\left(\arccos(5-y) + \frac{\pi}{6}\right)$

Prohodíme neznámé, aby zápis odpovídal konvencím

$f^{-1}(x):\ y = 2.\arccos(5-x) + \frac{\pi}{3}$

$H(f) = D\left(f^{-1}\right) = \langle 4;\ 6\rangle$

To je vidět z grafu: cos má H (f) na $\langle -1;\ 1\rangle$ a zde je graf posunutý o 5 nahoru ... tedy na $\langle 4;\ 6\rangle$



Určete rovnice asymptot grafu funkce $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x - 5}{x}$

Podmínky

[x ≠ 0]

V tomto bodě by se mohla nacházet svislá asymptota ... Dokážeme to tak,

zjistíme limitu funkce v tomto bodě, tj v bodě 0 (respektive v 0^+ nebo v 0^-, stačí si vybrat jeden případ)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3x^2 + 2x - 5}{x} = \frac{-5}{0^+} = -\infty$$

$$\left(\lim_{x\to 0^-} \frac{3x^2 + 2x - 5}{x} = \frac{-5}{0^-} = +\infty \quad \text{stačí vždy ověřit jen z jedné strany}\right)$$

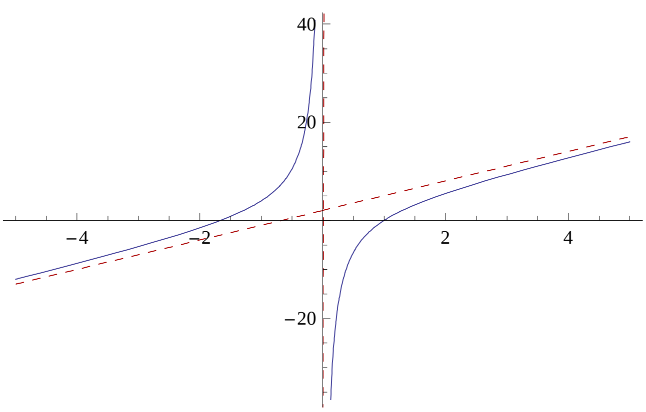
Limita jde vždy k nekonečnu ⇒ v tomto bodě **asymptota** skutečně je a má předpis **x = 0**

Nyní zjistíme, zda má funkce ještě nějaké asymptoty

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{3x^2+2x-5}{x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2 + 2x - 5}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} - \frac{5}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}}{1} = \mathbf{3}$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - k.x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{3x^2 + 2x - 5}{x} - 3x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2 + 2x - 5 - 3x^2}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x - 5}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2 - \frac{5}{x}}{1} = \mathbf{2}$$

Druhá **asymptota** má předpis **y = 3 x + 2**



Určete rovnice asymptot grafu funkce $f(x) = x - 3\,\text{arc tg}\,(x+1) + \frac{1}{x}$

Podmínky

$[x \neq 0]$

V tomto bodě by se mohla nacházet svislá asymptota ... Dokážeme to tak,

zjistíme limitu funkce v tomto bodě, tj v bodě 0 (respektive v 0^+ nebo v 0^-, stačí si vybrat jeden případ)

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x - 3\,\text{arc tg}\,(x+1) + \frac{1}{x}\right) = -\frac{3\pi}{4} + \infty = \infty$$

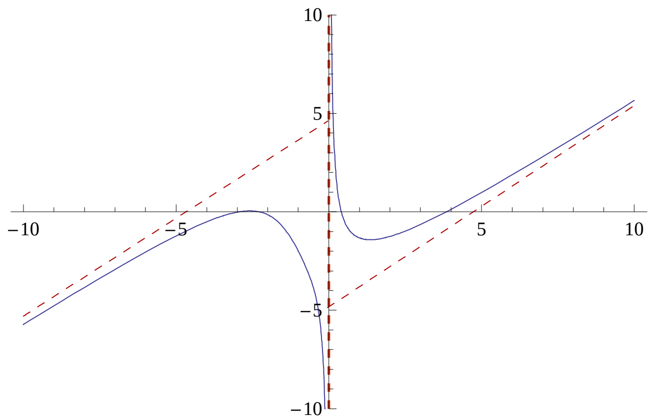
Limita jde k nekonečnu $\Rightarrow$ v tomto bodě asymptota skutečně je a má předpis $\mathbf{x = 0}$

Nyní zjistíme, zda má funkce ještě nějaké asymptoty

$$\mathbf{k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x - 3\,\text{arc tg}\,(x+1) + \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1 - \frac{-3\,\text{arc tg}\,(x+1)}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) = 1 - 0 + 0 = \mathbf{1}$$

$$\mathbf{q = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - k.x)} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x - 3\,\text{arc tg}\,(x+1) + \frac{1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(-3\,\text{arc tg}\,(x+1) + \frac{1}{x}\right) = 0 \pm \frac{3\pi}{2} = \mathbf{\pm\frac{3\pi}{2}}$$

Druhá a třetí **asymptota** mají předpis $\mathbf{y = x + \frac{3\pi}{2}}$ a $\mathbf{y = x - \frac{3\pi}{2}}$



Napište rovnici tečné roviny k rovině $z = \ln\sqrt{9x^2 - 2y^3}$ v bodě $T[1; -2, ?]$

Vypočteme třetí souřadnici bodu T (dosadíme do rovnice známé souřadnice bodu T)

$$\ln\sqrt{9.1 - 2.(-2)^3} = \ln\sqrt{9+16} = \ln 5 \Rightarrow \mathbf{T[1; -2; \ln 5]}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{9x^2 - 2y^3}}.\frac{1}{2\sqrt{9x^2 - 2y^3}}.18x = \frac{1}{\sqrt{9x^2 - 2y^3}}.\frac{9x}{\sqrt{9x^2 - 2y^3}} = \frac{9x}{9x^2 - 2y^3}$$

$$\mathbf{\frac{\partial z}{\partial x}(T) =} \frac{9x}{9x^2 - 2y^3}(1; -2) = \frac{9.1}{9.1^2 - 2.(-2)^3} = \frac{9}{9+16} = \mathbf{\frac{9}{25}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{9x^2 - 2y^3}}.\frac{1}{2\sqrt{9x^2 - 2y^3}}.(-6y^2) = \frac{1}{\sqrt{9x^2 - 2y^3}}.\frac{-3y^2}{\sqrt{9x^2 - 2y^3}} = -\frac{3y^2}{9x^2 - 2y^3}$$

$$\mathbf{\frac{\partial z}{\partial y}(T) =} -\frac{3y^2}{9x^2 - 2y^3}(1; -2) = \frac{3.(-2)^2}{9.1^2 - 2.(-2)^3} = \frac{-12}{9+16} = \mathbf{-\frac{12}{25}}$$

Normálový vektor tečné roviny : $\vec{n} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}(T),\ \frac{\partial z}{\partial y}(T),\ -1\right)$

$\vec{n} = \left(\frac{9}{25}, -\frac{12}{25}, -1\right)$

Vynásobíme – li vektor libovolným číslem,

vektor se nezmění. Pro snažší počítání si normálový vektor vynásobíme číslem 25

$\vec{n} = (9, -12, -25)$

Obecná rovnice roviny : $ax + by + cz + d = 0$, kde $a, b, c \in \vec{n} = (a, b, c)$ a $x, y, z \in T[x; y; z]$

$z:\ 9x - 12y - 25z + d = 0$

Vypočítáme **d**

$T \in y:\ 9.1 - 12.(-2) - 25.\ln 5 + d = 0$

$9 + 24 - 25 \ln 5 = -d$

$\mathbf{d = 25 \ln 5 - 33}$

$z:\ 9x - 12y - 25z + 25\ln 5 - 33 = 0$

Parametrická rovnice přímky (normály) :

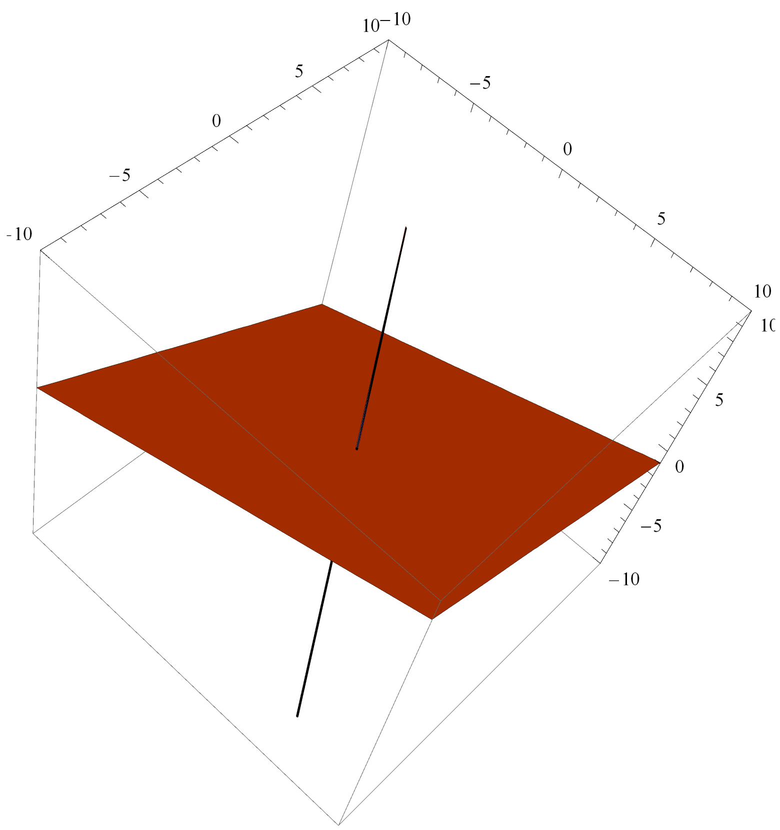
$$x = x + a.t$$
$$y = y + b.t$$
$$z = z + c.t$$

, kde $a, b, c \in \vec{n} = (a, b, c)$ a $x, y, z \in T[x; y; z]$

$x = 1 + 9t$

$y = -2 - 12t$

$z = \ln 5 - 25t$



Určete monotónost a extrémy funkce $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{3-x}{x^2}$

<u>Podmínky</u>

[x ≠ 0]

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{3-x}{x^2}\right)^2} \cdot \frac{-x^2-(3-x)2x}{x^4} = \frac{1}{1+\frac{(3-x)^2}{x^4}} \cdot \frac{x^2-6x}{x^4} = \frac{x^2-6x}{x^4+(3-x)^2}$$

Z čitatele určíme nulové body, tzn. postavíme ho rovný 0

$x^2 - 6x = 0$

$x(x-6) = 0$

- **x = 0**
- **x = 6**

nulové body : 0; 6

Na začátku nám ale vyšla podmínka, že **x ≠ 0**

Vytvoříme tedy jednotlivé intervali podle nulových bodů

- $(-\infty\,;0)$
- $(0\ \ ;6\rangle$
- $\langle 6\ \ ;\infty)$

Z každého intervalu si vybereme libovolné číslo a dosadíme ho f ' (x). Pokud je výsledek

f ′ (x) > 0 .... *funkce je na tomto intervalu* ***rostoucí***

f ′ (x) < 0 .... *funkce je na tomto intervalu* ***klesající***

$$f'(-1) = \frac{(-1)^2-6.(-1)}{(-1)^4+(3-(-1))^2} = \frac{7}{17} \quad > 0 \quad \text{rostoucí}$$

$$f'(1) = \frac{1^2-6.1}{1^4+(3-1)^2} = -1 \quad < 0 \quad \text{klesající}$$

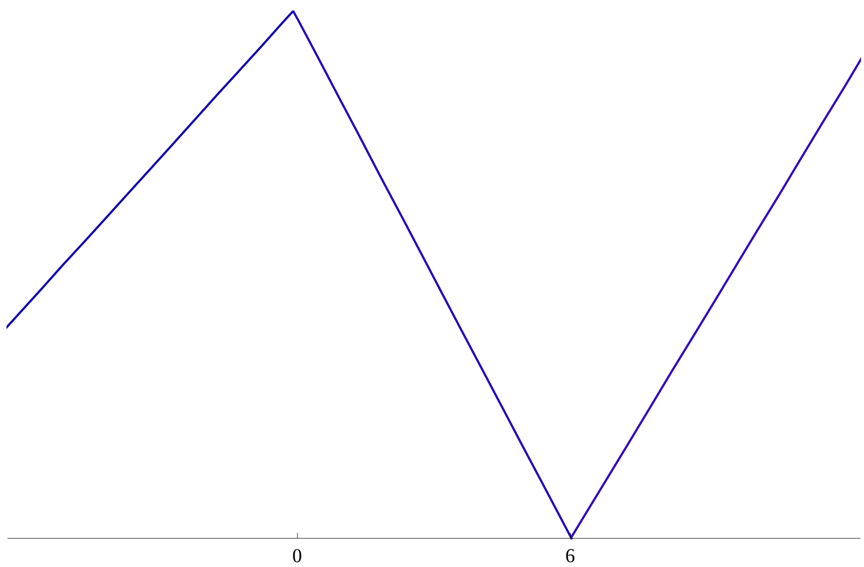
$$f'(9) = \frac{9^2-6.9}{9^4+(3-9)^2} = \frac{3}{733} \quad > 0 \quad \text{rostoucí}$$

$(-\infty; 0)$ .... f ' (x) > 0 .... rostoucí

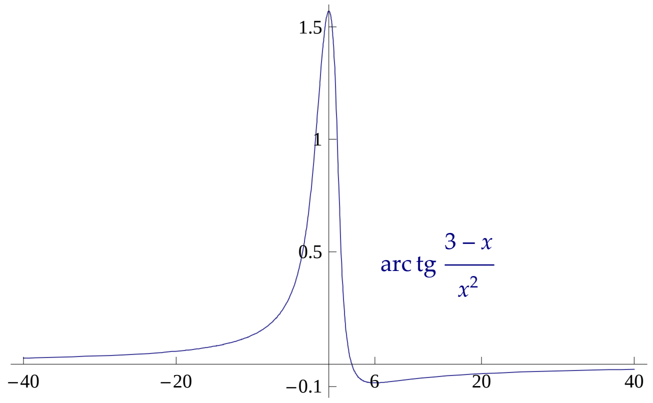
$(0\ \ ; 6\rangle$ .... f ' (x) < 0 .... klesající

$\langle 6\ \ ; \infty)$ .... f ' (x) > 0 .... rostoucí

Když si funkci jednoduše představíme, poznáme, že v bodě 6 má minimum.



Skutečný průběh funkce



Určete Taylorův rozvoj 3. stupně funkce f (x) = x.e^{2-x} v bodě a = 2

Vypočítáme funkční hodnotu v bodě 2

$f(2) = 2.\, e^{2-2} = 2$

Chceme Taylorův rozvoj 3. stupně,

tzn. provedeme derivace do třetího řádu a vždy vypočítáme funkční hodnotu v bodě 2

$f'(x) = e^{2-x} + xe^{2-x}.(-1) = e^{2-x} - xe^{2-x}$

$\mathbf{f'(2) =} 1 - 2.1 = \mathbf{-1}$

$f''(x) = -e^{2-x} - e^{2-x} + xe^{2-x}$

$\mathbf{f''(2) =} -1 - 1 + 2 = \mathbf{0}$

$f'''(x) = e^{2-x} + e^{2-x} + e^{2-x} + xe^{2-x}.(-1) = 3\, e^{2-x} - xe^{2-x}$

$\mathbf{f'''(2) =} 3 - 2 = \mathbf{1}$

Pak už jen dosadíme do vzorce pro *Taylorův polynom*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + R_n$$

$$\mathbf{x.e^{2-x} =} 2 - 1(x-2) + \frac{1}{6}(x-2)^3 = 2 - x + 2 + \frac{(x-2)^3}{6} = \mathbf{4 - x + \frac{(x-2)^3}{6}}$$

$$\color{red}{\mathbf{x.e^{2-x} = 4 - x + \frac{(x-2)^3}{6}}}$$

Taylorův polynom