Střední průmyslová škola a Střední odborné učiliště, Trutnov, Školní 101

Sbírka úloh z matematiky

v rámci projektu královéhradeckého kraje

zavádění inovativních metod výuky pomocí ICT v předmětu matematika na střední škole

PRK SMV 200504/PT06

Zpracovali:
Mgr. Burlaková Eva
Mgr. Fibikarová Šárka
Mgr. Jílková Iva

Vypracovala
Střední průmyslová škola a Střední odborné učiliště, Trutnov, Školní 101,
jako projekt v rámci Státní informační politiky ve vzdělávání
(SIPVZ).

Realizace projektu byla podpořena příspěvkem Královéhradeckého kraje.

1. KAPITOLA - Funkce

Funkce, vlastnosti funkcí

Reálná funkce f reálné proměnné je předpis, podle kterého je každému $x \in R$ přiřazeno nejvýše jedno $y \in R$; zapisujeme **y=f(x)**

Příklad 1: Sestavte tabulku závislosti dráhy s na čase t,

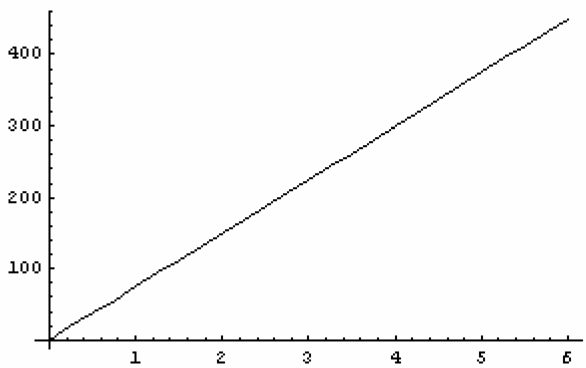
víte-li, že průměrná rychlost auta v = 75 km/h a pro čas t platí $t \in \{1h, 2h, 3h, 4h, 5h\}$. Zaneste výsledky do grafu.

```
In[54]:= g[x_] = 75 * x

Out[54]= 75 x

In[57]:= Table[{x, g[x]}, {x, 1, 5}] // TableForm
```

Out[3]//TableForm=

1	75
2	150
3	225
4	300
5	375
t/hod	s/km

```
In[6]:= Plot[Evaluate[%1], {x, 0, 6}]
```




```
Out[6]= - Graphics -
```

Příklad 2: Při rovnoměrném přímočarém pohybu tělesa

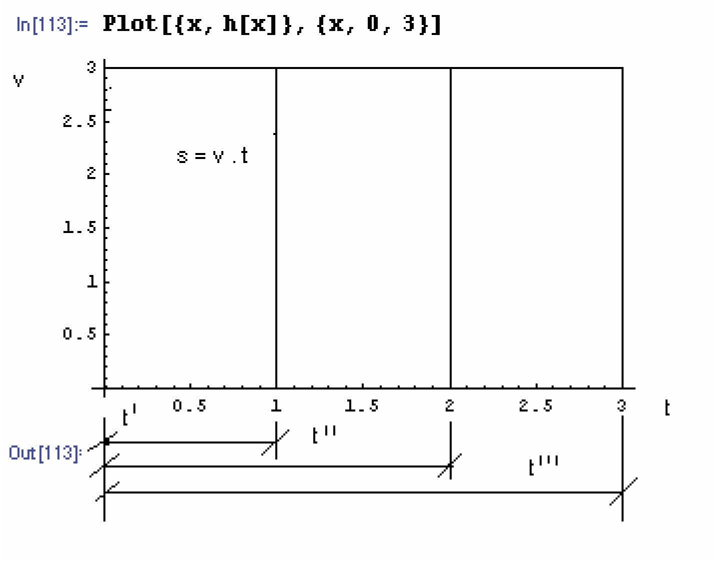
je rychlost dána vztahem $v = \frac{s}{t}$. Vyjádříme graficky přímé úměrnosti veličin, vyplývající z daného vztahu (vzorce)

Řešení:

- Při stálé (konstantní) rychlosti v je dráha přímo úměrná času, tj. platí funkční rovnice

$$s = v*t$$

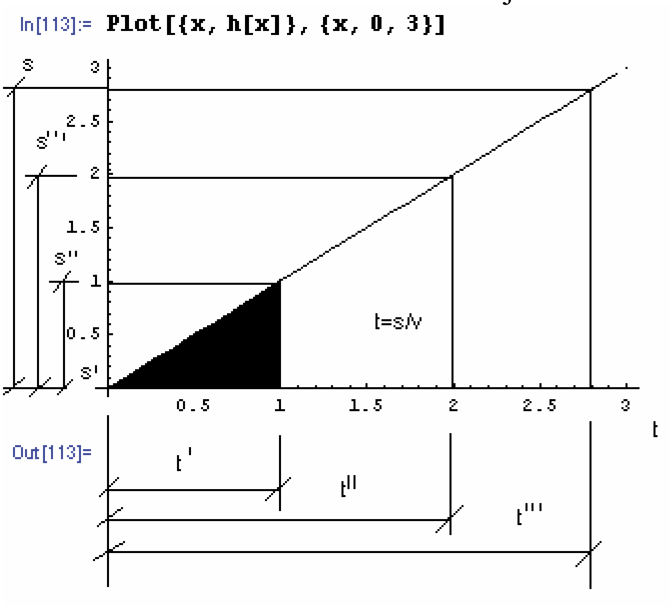
grafické znázornění této závislosti ukazuje obrázek:



Velikost dráhy s (za jednotku času) je vyjádřena obsahem příslušného obdélníku.

Při stálé rychlosti v je čas přímo úměrný dráze, tj. platí funkční rovnice $t = \frac{s}{v}$

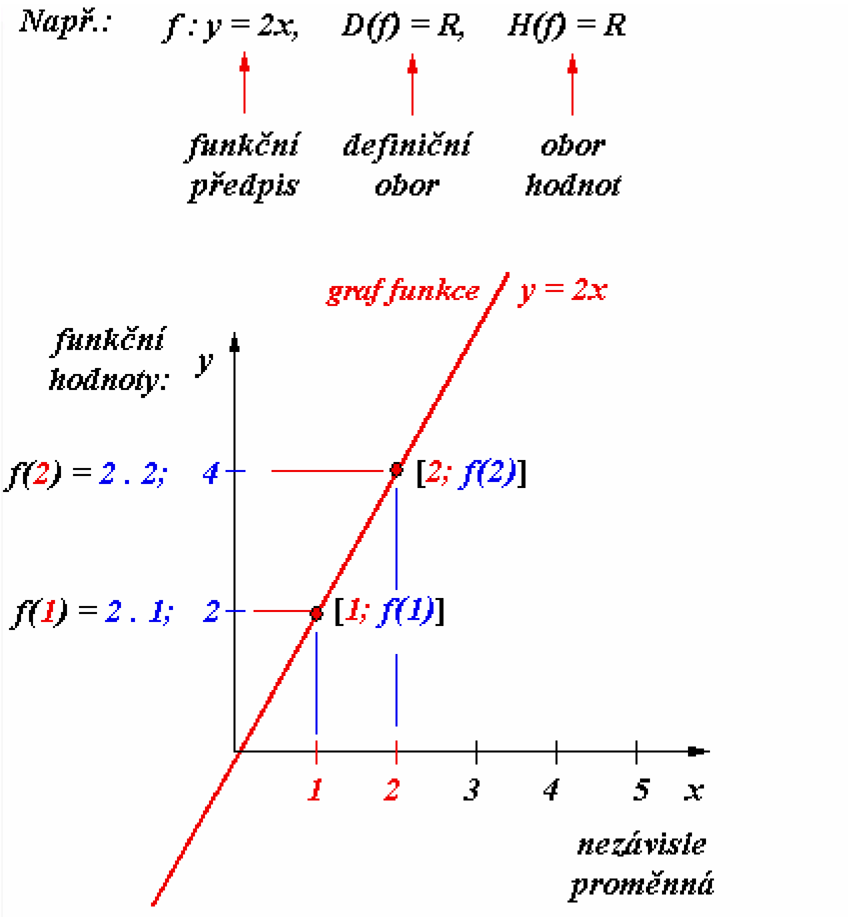
Grafické znázornění této závislosti ukazuje obrázek:



Je zřejmé, že dráha je přímo úměrná času.

Lineární funkce

Lineární funkce je každá funkce daná předpisem y = k x + q, kde k$\in$R-{0}, kde q$\in$R D = H = R .
Grafem lineární funkce y = k x + q je přímka procházející bodem [0,q].
Zvláštním případem lineární funkce je **PŘÍMÁ ÚMĚRNOST** (přímka, procházející počátkem).



Příklad 3: Sestrojte graf funkce

a) y = 2x + 3

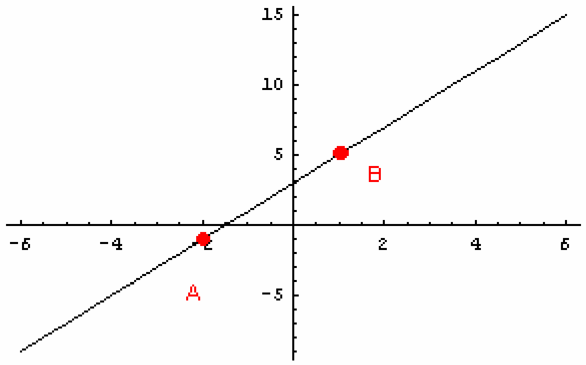
Řešení:

Lineární funkce je pro k>0 rostoucí, nemá maximum ani minimum.
Víme, že grafem je přímka, tj. stačí si zvolit za x libovolné dva body a dopočítáme y.
Souřadnice bodů naneseme do souřadnicového systému Oxy.

```
In[23]:= f[x_] = 2 x + 3

Out[23]= 3 + 2 x

In[29]:= Table [{x, f[x]}, {x, -2, 1, 3}] // TableForm

Out[29]//TableForm=
         -2        -1
         1         5
```

A = [-2,-1]
B = [1,5]

```
In[9]:= Clear[f]

In[10]:= f[x_] = 2 x + 3

Out[10]= 3 + 2 x

In[11]:= Plot[Evaluate[%10], {x, -6, 6}]
```

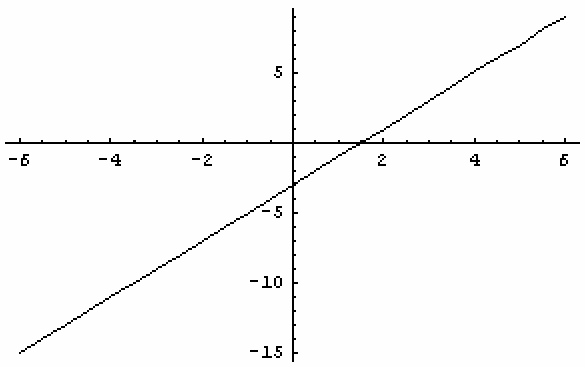



```
Out[11]= - Graphics -
```

q, tj.úsek, který vytíná funkce na ose y je kladný

b) y = 2x - 3
obdobně jako a)

```
In[9]:= Clear[f]

In[12]:= f[x_] = 2 x - 3

Out[12]= -3 + 2 x

In[14]:= Plot[Evaluate[%12], {x, -6, 6}]
```

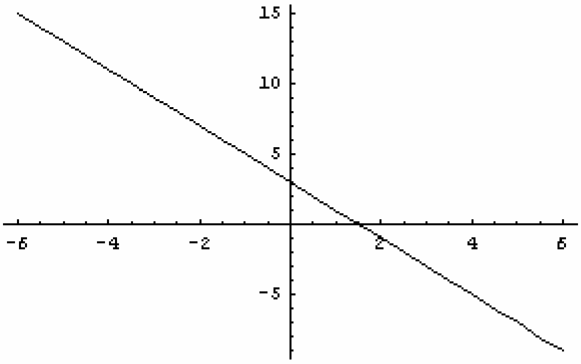



```
Out[14]= - Graphics -
```

q, tj.úsek, který vytíná funkce na ose y je záporný

c) y = - 2x + 3
Pro k<0 klesající, nemá maximum ani minimum

```
In[9]:= Clear[f]

In[15]:= f[x_] = -2 x + 3

Out[15]= 3 - 2 x

In[16]:= Plot[Evaluate[%15], {x, -6, 6}]
```

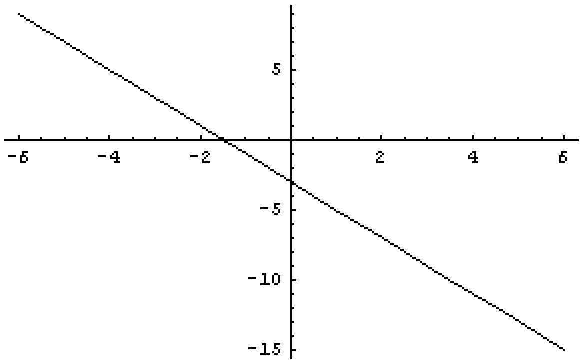



```
Out[16]= - Graphics -
```

q, tj.úsek, který vytíná funkce na ose y je kladný

d) $y = -2x - 3$

```
In[9]:= Clear[f]

In[17]:= f[x_] = -2 x - 3

Out[17]= -3 - 2 x

In[18]:= Plot[Evaluate[%17], {x, -6, 6}]
```




```
Out[18]= - Graphics -
```

q, tj.úsek, který vytíná funkce na ose y je záporný

e) $y = 3$

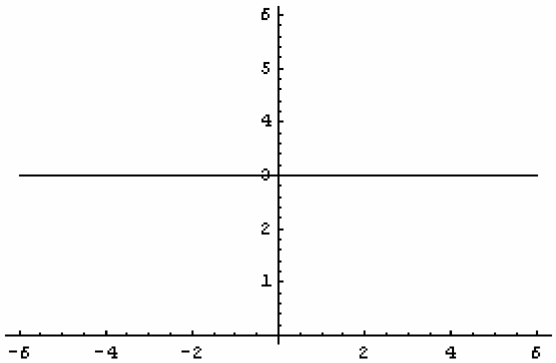
Funkce $y = q$, kde $q \in R$, se nazývá **konstantní** funkce. $D = R$, $H = \{q\}$.
Grafem konstantní funkce je přímka rovnoběžná s osou x:

In[9]:= `Clear[f]`

In[19]:= `f[x_] = +3`

Out[19]= 3

In[20]:= `Plot[Evaluate[%19], {x, -6, 6}]`



Out[20]= - Graphics -

q, tj.úsek, který vytíná funkce na ose y je kladný

f) y = - 3

Grafem konstantní funkce je přímka rovnoběžná s osou x.

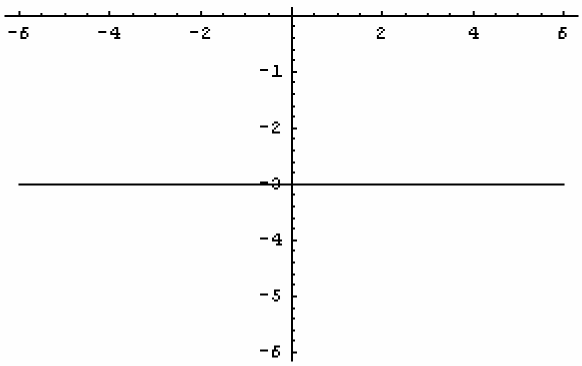
Funkce je nerostoucí a neklesající.

In[9]:= `Clear[f]`

In[21]:= `f[x_] = -3`

Out[21]= -3

In[22]:= `Plot[Evaluate[%21], {x, -6, 6}]`



Out[22]= - Graphics -

q, tj.úsek, který vytíná funkce na ose y je záporný

Příklad 4: Řešte graficky soustavu rovnic:

$$2x - y = 2$$
$$x - 2y - 2 = 0$$

Řešení:

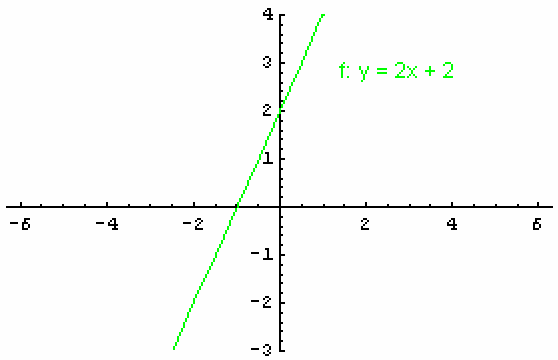
Z každé rovnice soustavy vypočteme y a dostaneme lineární funkce:

f: $y = 2x + 2$

g: $y = \dfrac{x}{2} - 1$

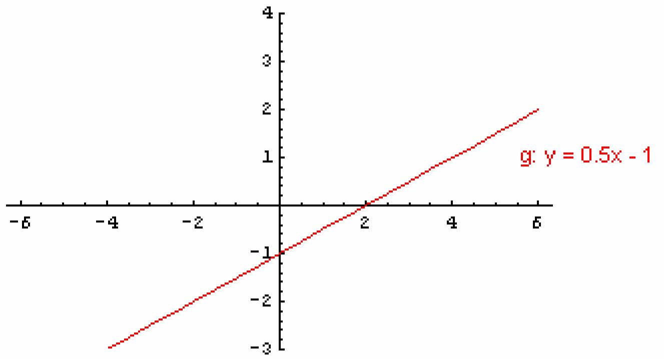
Jejich grafy jsou přímky, které se protínají v bodě P [-2,-2]; jeho souřadnice x = -2, y = -2 jsou řešením dané soustavy rovnic.

```
In[1]:= Solve[{2 x - y == -2, x - 2 y - 2 == 0}, {x, y}]

Out[1]= {{x → -2, y → -2}}

In[8]:= f[x_] = 2 x + 2

Out[8]= 2 + 2 x

In[9]:= g[x_] = 0.5 x - 1

Out[9]= -1 + 0.5 x

In[32]:= Plot[Evaluate[%8], {x, -6, 6},
          PlotStyle → RGBColor[0, 1, 0], PlotRange → {-3, 4}]
```



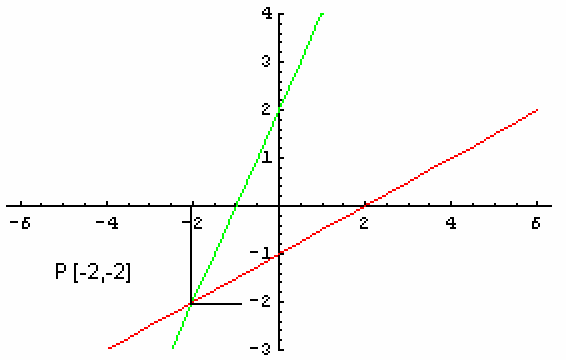

```
Out[32]= - Graphics -
```

In[31]:=
```
Plot[Evaluate[%9], {x, -6, 6},
  PlotStyle → RGBColor[1, 0, 0], PlotRange → {-3, 4}]
```



Out[31]= - Graphics -

In[33]:=
```
Show[%32, %31]
```



Out[33]= - Graphics -

Příklad 5: Řešte graficky soustavy rovnic:

a) $3x + 2y = 6$

$$2x = 4 - \frac{4}{3}y$$

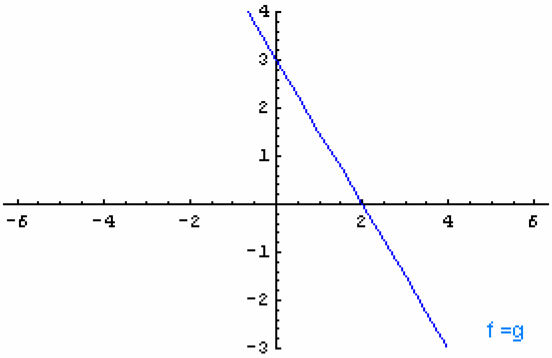
Z každé rovnice soustavy vypočteme **y** a dostaneme lineární funkce:

f: $\quad y = -\frac{3}{2}x + 3$

g: $\quad y = -\frac{3}{2}x + 3$

Grafy obou funkcí jsou splývající přímky, vyhovují všechny dvojice [x - 1,5x + 3]

```
In[46]:= Clear[f];
         Clear[g]

In[47]:= f[x] = -3 / 2 x + 3

Out[47]= 3 - 3 x / 2

In[48]:= g[x] = f[x]

Out[48]= 3 - 3 x / 2

In[50]:= Plot[Evaluate[%47], {x, -6, 6},
          PlotStyle → RGBColor[0, 0, 1], PlotRange → {-3, 4}]
```




```
Out[50]= - Graphics -
```

b)

$$\begin{aligned} x + 2y &= 2 \\ 3x + 6y &= 1 \end{aligned}$$

Z každé rovnice soustavy vypočteme **y** a dostaneme lineární funkce:

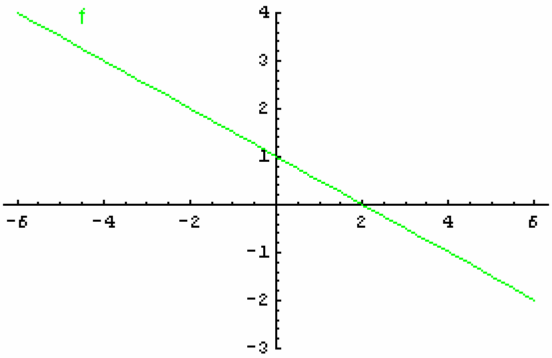
```
In[54]:= Clear[f];
         Clear[g]
         Solve[x + 2 y == 2, y]
```

Out[56]= $\left\{\left\{y \to \frac{2-x}{2}\right\}\right\}$

In[57]:= $f[x] = \frac{2-x}{2}$

Out[57]= $\frac{2-x}{2}$

```
In[58]:= Plot[Evaluate[%57], {x, -6, 6},
          PlotStyle → RGBColor[0, 1, 0], PlotRange → {-3, 4}]
```



Out[58]= - Graphics -

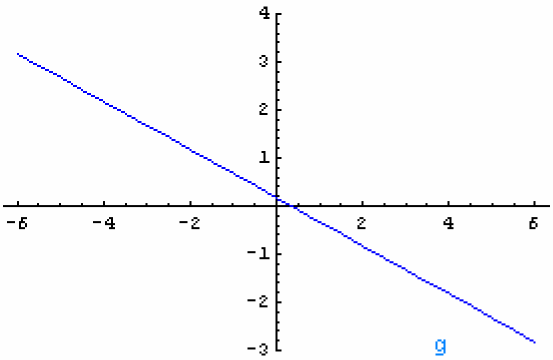
```
In[59]:= Solve[3 x + 6 y == 1, y]
```

Out[59]= $\left\{\left\{y \to \frac{1}{6}(1-3x)\right\}\right\}$

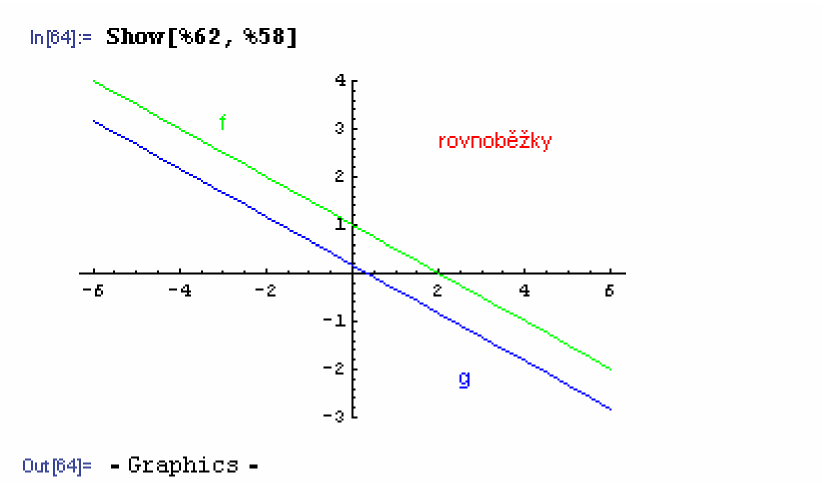
In[60]:= $g[x] = \frac{1}{6}(1-3x)$

Out[60]= $\frac{1}{6}(1-3x)$

```
In[62]:= Plot[Evaluate[%60], {x, -6, 6},
          PlotStyle → RGBColor[0, 0, 1], PlotRange → {-3, 4}]
```



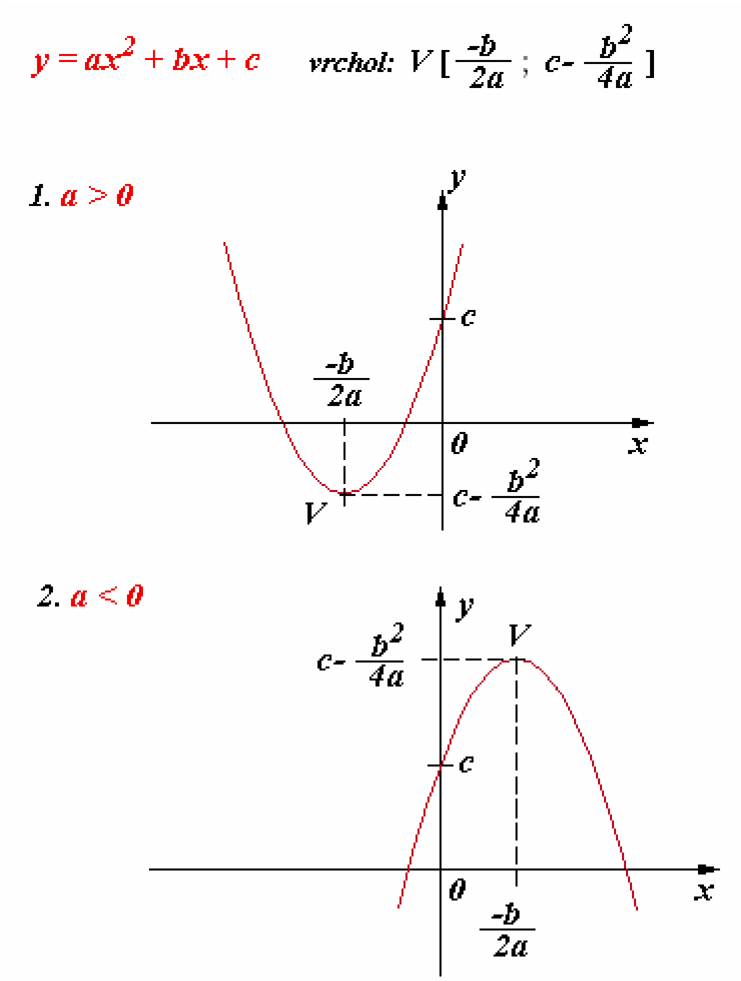
Out[62]= - Graphics -



Přímky f, g jsou rovnoběžné různé, nemají tedy žádný společný bod.
Soustava rovnic nemá žádné řešení.

Kvadratická funkce

Kvadratická funkce je každá funkce daná předpisem $y = a x^2 + b x + c$, kde $a \in R - \{0\}, b \in R, c \in R$. D=R
Grafem kvadratické funkce je křivka zvaná **parabola,** jejíž osa je rovnoběžná s osou **y.**
O tom, zda parabola bude konkávní nebo konvexní, rozhoduje koeficient **a** u kvadratického členu.
Je-li **a >0**, je parabola konvexní (rozevírá se směrem nahoru)
Je.li **a< 0**, je parabola konkávní (rozevírá se směrem dolů)



- Máme-li sestrojit graf kvadratické funkce, je vhodné určit souřadnice vrcholu příslušné paraboly a je také vhodné určit souřadnice jejich průsečíků s osami x,y.

Příklad 6: Sestrojte graf kvadratické funkce

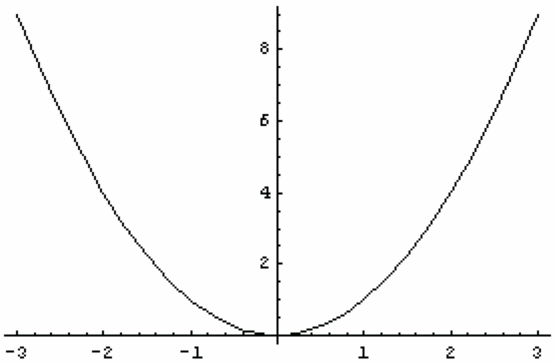
$y = x^2$

Řešení:

Nejjednodušší příklad - V=[0,0]
Zvolíme několik bodů za x a vypočítáme y
Body zaneseme do systému Oxy a zakreslíme parabolu

```
In[3]:= g[x_] = x^2

Out[3]= x²

In[4]:= Table[{x, g[x]}, {x, -3, 3, 1}] // TableForm

Out[4]//TableForm=
      -3      9
      -2      4
      -1      1
      0       0
      1       1
      2       4
      3       9
```

```
g[x_] = x^2

x²

Plot[g[x], {x, -3, 3}]
```



- Graphics -

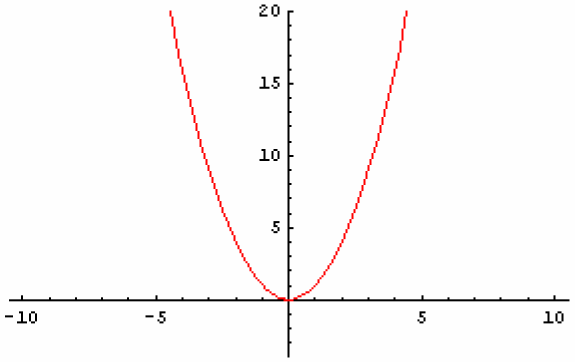
Funkce je zdola omezená, klesající na intervalu (-∞,0⟩, rostoucí na intervalu ⟨0,+∞), H=⟨0,+∞)

Příklad 7: Zakreslete grafy funkcí:

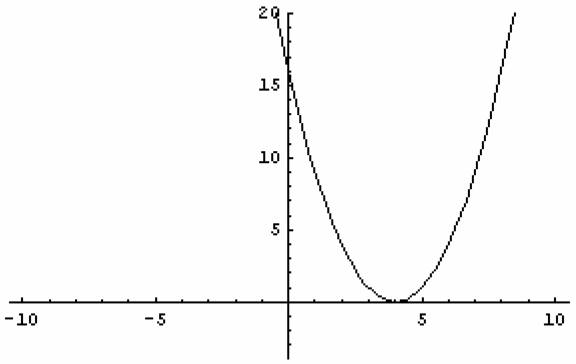
$y = (x - 4)^2$, $y = (x - 2)^2$, $y = x^2$, $y = (x + 2)^2$, $y = (x + 4)^2$,

Řešení:

```
Clear[f];
In[23]:= f[x_] = x^2
Out[23]= x²
In[25]:= Plot[Evaluate[%23], {x, -10, 10}, PlotRange → {-4, 20},
 PlotStyle → RGBColor[1, 0, 0]]
```

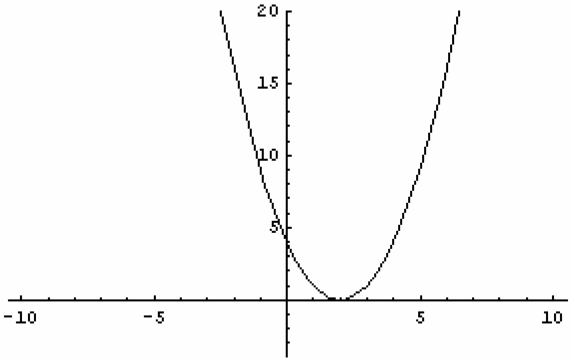



```
Out[25]= - Graphics -
In[1]:= Clear[f];
In[2]:= f[x_] = (x - 4) ^2
Out[2]= (-4 + x)²
In[15]:= Plot[Evaluate[%2], {x, -10, 10}, PlotRange → {-4, 20}]
```

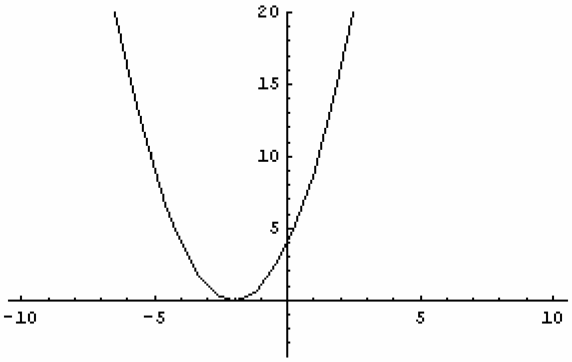



```
Out[15]= - Graphics -
```

```
Clear[f];

In[16]:= f[x_] = (x - 2)^2

Out[16]= (-2 + x)^2

In[17]:= Plot[Evaluate[%16], {x, -10, 10}, PlotRange → {-4, 20}]
```

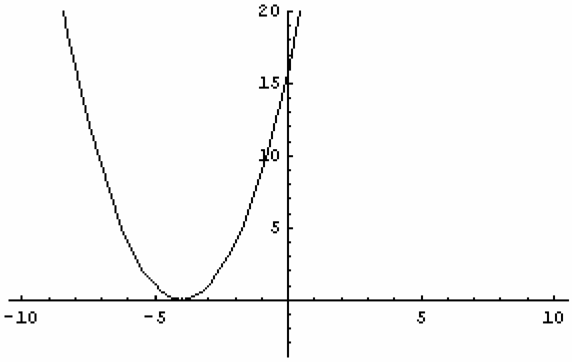



```
Out[17]= - Graphics -

Clear[f];

In[18]:= f[x_] = (x + 2)^2

Out[18]= (2 + x)^2

In[20]:= Plot[Evaluate[%18], {x, -10, 10}, PlotRange → {-4, 20}]
```

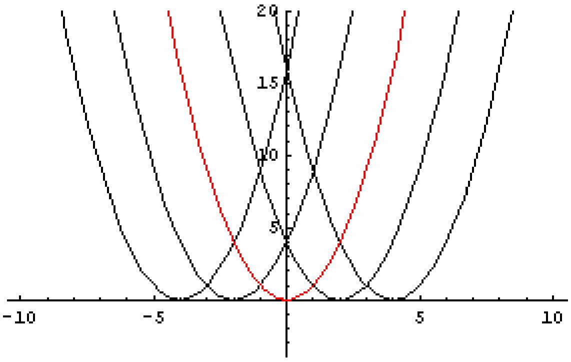



```
Out[20]= - Graphics -
```

```
Clear[f];

In[21]:= f[x_] = (x + 4) ^2

Out[21]= (4 + x)^2

In[22]:= Plot[Evaluate[%21], {x, -10, 10}, PlotRange → {-4, 20}]
```




```
Out[22]= - Graphics -

In[26]:= Show[%15, %17, %20, %22, %25]
```




```
Out[26]= - Graphics -
```

In[27]:= **Clear[f]**

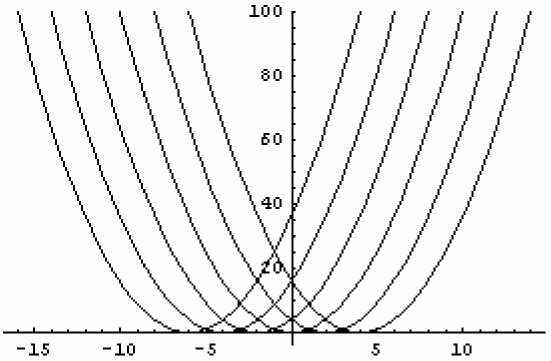
In[28]:= **f[x_] = (x + c)^2**

Out[28]= $(c + x)^2$

In[29]:= **Table[f[x], {c, -4, 6, 2}]**

Out[29]= $\{(-4 + x)^2, (-2 + x)^2, x^2, (2 + x)^2, (4 + x)^2, (6 + x)^2\}$

In[38]:= **Plot[Evaluate[%29], {x, -16, 14}, PlotRange → {-4, 100}]**



Out[38]= - Graphics -

Příklad 8:Sestrojte graf funkce:

f: $y = - x^2 + 2x$

Řešení:

D(f) = R
f: $y = -(x^2 - 2x)$
$y = - (x^2 - 2x + 1) + 1$
$y = - (x - 1)^2 + 1$
Grafem funkce f je parabola rozevírající se směrem dolů s vrcholem V = [1,1]
Průsečíky grafu funkce f s osou x:

$$f(x) = 0$$

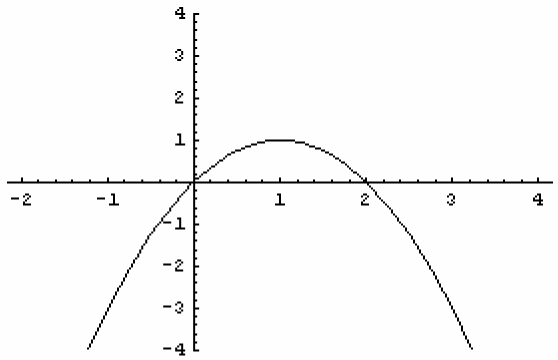
$-x^2 + 2x = 0$
$x(x-2) = 0$
$x_1 = 0, \quad x_2 = 2$
Graf funkce f protíná osu x v bodech [0,0], [2,0].
Průsečík grafu funkce f s osou y:
$f(0) = -0^2 + 2.0 = 0$
Graf funkce f protíná osu y v bodě [0,0].
$H(f) = (-\infty, 1\rangle$.
Graf funkce f je na obr.

In[39]:= `Clear[f]`

In[40]:= `f[x_] = -x^2 + 2 x`

Out[40]= $2x - x^2$

In[53]:= `Plot[Evaluate[%40], {x, -2, 4}, PlotRange → {-4, 4}]`



Out[53]= - Graphics -

Příklad 9: Sestrojte parabolu, která je grafem funkce:

a)f: $y = 2x^2 - 4x - 6$

b)g: $y = x^2 + 2x + 3$

Řešení:

a)f: $y = 2x^2 - 4x - 6$
Nejprve vypočítáme souřadnice vrcholu paraboly:
a)Podle vzorce
Parabola, která je grafem funkce f, se rozevírá směrem nahoru (a>0) a jejím vrcholem je bod V = [1,8]
b) Danou funkci si přepíšeme do tvaru:

$$y = 2(x^2 - 2x) - 6$$
$$y = 2(x - 1)^2 - 6 - 2$$
$$y = 2(x - 1)^2 - 8$$

Průsečík s osou y:
$f(0) = 2.0^2 - 4.0 - 6 = -6$
Graf funkce f protíná osu y v bodě [0,-6].
Průsečík s osou x: $f(x) = 0$

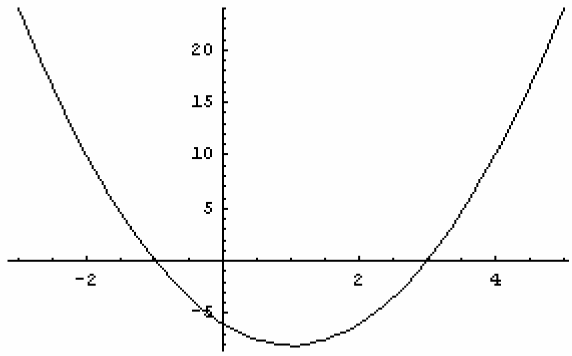
$$f(x) = 0$$
$$2(x^2 - 2x - 3) = 0$$
$$2(x+1)(x-3) = 0$$
$$x_1 = -1,\ x_2 = 3$$

Graf fce f protíná osu x v bodech [-1,0] , [3,0]
Graf funkce f je sestrojen na obr.

```
In[1]:= f[x_] = 2 x^2 - 4 x - 6

Out[1]= -6 - 4 x + 2 x²

In[4]:= Solve[+4 / (2 * 2) == x,]

Out[4]= {{x → 1}}

In[11]:= Solve[(-(16 + (4 * 2 * 6)) / (4 * 2)) == y,]

Out[11]= {{y → -8}}

In[12]:= f[0]

Out[12]= -6

In[13]:= Solve[2 x^2 - 4 x - 6 == 0 x]

Out[13]= {{x → -1}, {x → 3}}
```

Graf funkce:

```
In[16]:= Plot[f[x], {x, -3, 5}]
```




```
Out[16]= - Graphics -
```

b) g: $y = x^2 + 2x + 3$

$D_g = R$

g: $y = (x + 1)^2 + 2$

Grafem funkce g je parabola rozevírající se směrem nahoru s v rcholem V[-1,2].

Průsečík grafu funkce g s osou y: $g(0) = 0^2 + 2.0 + 3 = 3$

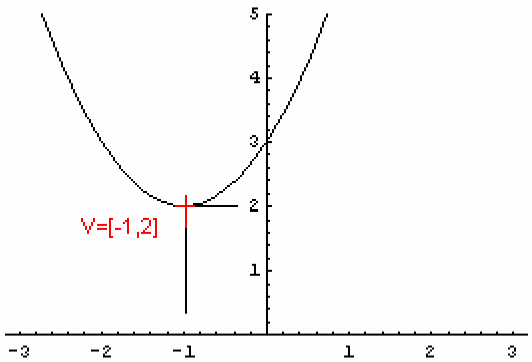
Graf funkce g protíná osu y v bodě [0,3].

$H_g = \langle 2, +\infty)$

Graf funkce g je sestrojen na obr.

```
ImplicitPlot[x^2 + 2 x + 3 == 0]

Out[10]= ImplicitPlot[3 + 2 x + x² == 0]
```

```
In[21]:= Plot[f[x], {x, -3, 3}, PlotRange → {0, 5}]
```




```
Out[21]= - Graphics -
```

Grafické řešení kvadratické rovnice

Podle vzájemné polohy paraboly $y=x^2$ a přímky, která je grafem funkce $y=-px-q$, a není rovnoběžná s osou y, mohou nastat tyto případy:

a) přímka a parabola mají dva společné body;
rovnice $x^2 + px + q = 0$ má dva různé kořeny

b) přímka se paraboly dotýká;
rovnice $x^2 + px + q = 0$ má jediný kořen (dvojnásobný)

c) přímka a parabola nemají žádný společný bod;
rovnice $x^2 + px + q = 0$ nemá žádný kořen

Příklad 10: Řešte graficky rovnici

a) $x^2 + 1/2x - 1/2 = 0$

b) $1/2x^2 = -2x – 2$

c) $2x^2 = 3x - 4$

Řešení:

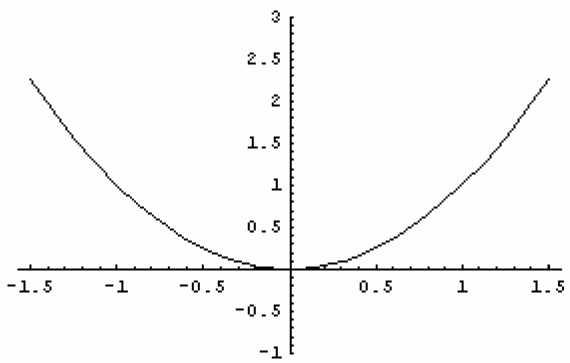
a) $x^2 + 1/2x - 1/2 = 0$

Rovnici napíšeme v ekvivalentním tvaru $x^2 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ a sestrojíme grafy funkcí $y = x^2$ a $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Grafem druhé funkce je přímka procházející body [0,1/2] a [1,0]. Oba grafy mají společné dva body, bod [-1,1] a [1/2,1/4]. Jejich první souřadnice, tj. čísla -1 a ½, jsou kořeny dané rovnice.

```
In[23]:= clear[f]; f[x_] = x^2

Out[23]= x²

In[24]:= Table[{x, f[x]}, {x, -3, 3, 1}] // TableForm

Out[24]//TableForm=
```

-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

```
In[41]:= Plot[f[x], {x, -1.5, 1.5}, PlotRange → {-1, 3}]
```




```
Out[41]= - Graphics -
```

In[26]:= `clear[g]; g[x_] = -1/2 x + 1/2`

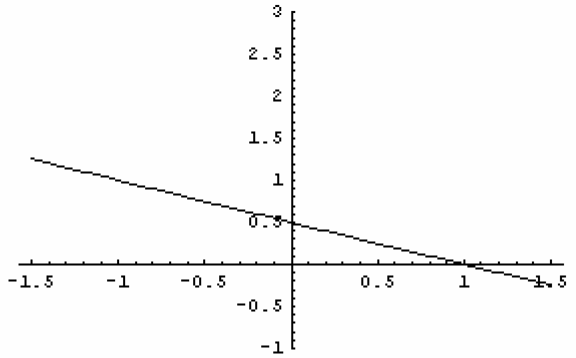
Out[26]= $\frac{1}{2} - \frac{x}{2}$

In[32]:= `Table[{x, g[x]}, {x, -1, 2, 2}] // TableForm`

Out[32]//TableForm=

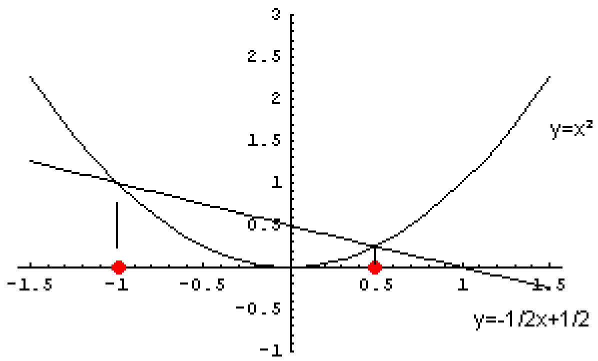
-1	1
1	0

In[39]:= `Plot[g[x], {x, -1.5, 1.5}, PlotRange → {-1, 3}]`



Out[39]= - Graphics -

In[42]:= `Show[%39, %41]`



Out[42]= - Graphics -

b) $1/2x^2 = -2x - 2$

Rovnici upravíme na tvar $x^2 = -4x - 4$ a podle předcházejícího postupu sestrojíme grafy funkcí: $y = -4x - 4$ a $y = x^2$

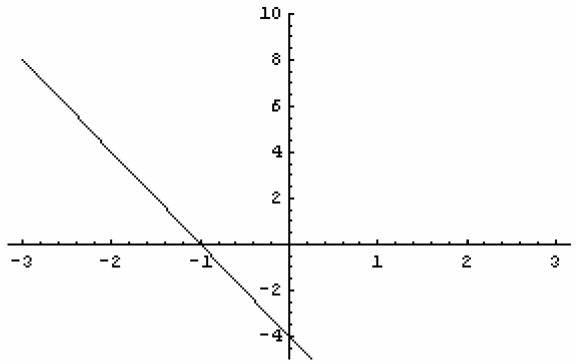
```
In[44]:= clear[g]; g[x_] = -4 x - 4
```

```
Out[44]= -4 - 4 x
```

```
In[45]:= clear[f]; f[x_] = x^2
```

Out[45]= x^2

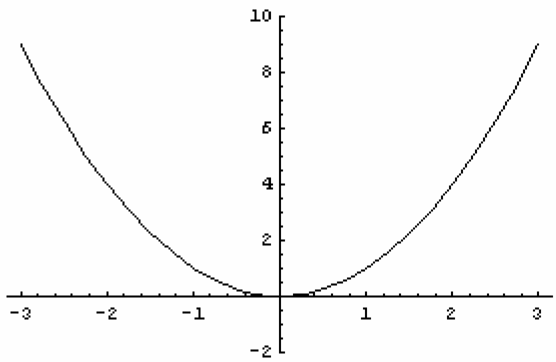
```
In[69]:= Plot[g[x], {x, -3, 3}, PlotRange → {-5, 10}]
```



```
Out[69]= - Graphics -
```

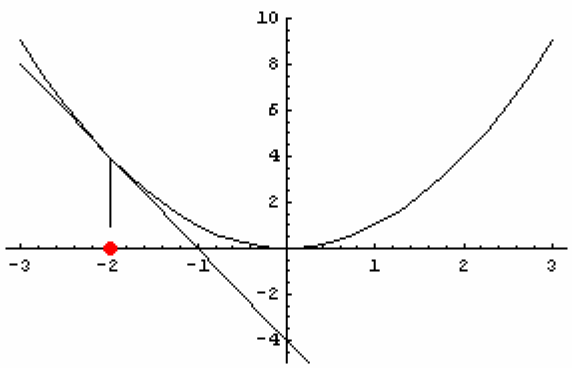
Graf funkce $y = x^2$

```
In[71]:= Plot[f[x], {x, -3, 3}, PlotRange → {-2, 10}]
```



```
Out[71]= - Graphics -
```

```
In[72]:= Show[%69, %71]
```



```
Out[72]= - Graphics -
```

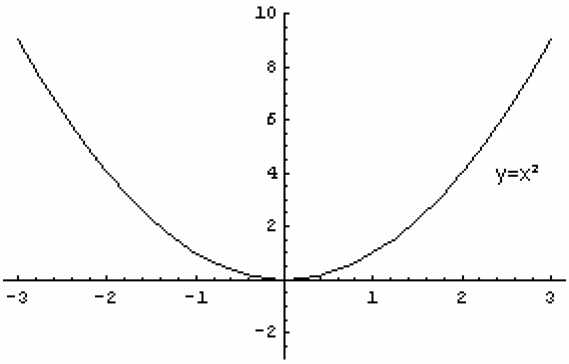
Oba grafy zaneseme do společného souřadnicového systému a zjistíme, že parabola s přímkou má společný právě jeden bod.

Kvadratická rovnice má dva kořeny : $x_1 = x_2 = -2$

c) $2x^2 = 3x - 4$

Rovnici upravíme na tvar $x^2 = 3/2x - 2$ a podle známého postupu sestrojíme grafy funkcí $y = x^2$ a $y = 3/2x - 2$

```
In[76]:= Plot[f[x], {x, -3, 3}, PlotRange → {-3, 10}]
```



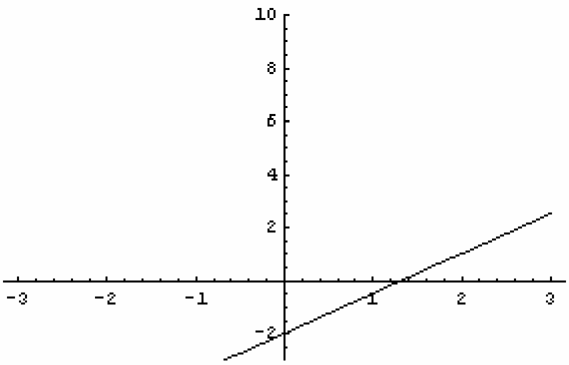

```
Out[76]= - Graphics -
```

Graf funkce $y = 3/2x - 2$

```
In[73]:= clear[g]; g[x_] = 3/2 x - 2
```

Out[73]= $-2 + \frac{3x}{2}$

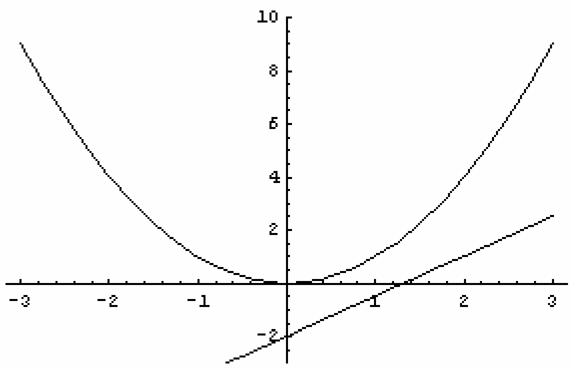
```
In[77]:= Plot[g[x], {x, -3, 3}, PlotRange → {-3, 10}]
```




```
Out[77]= - Graphics -
```

Oba grafy zaneseme do společného souřadnicového systému

In[78]:= Show[%76, %77]



Out[78]= - Graphics -

Přímka s parabolou nemá žádné společné body, tj. kvadratická rovnice nemá řešení.

Grafické řešení kvadratických nerovnic

Kvadratickou nerovnicí nazýváme nerovnici ve tvaru $ax^2 + bx + c > 0$, kde $a,b,c \in R$, $a \neq 0$. Znak nerovnosti může být $\neq, \leq, \geq, <, >$.
Nejčastějším řešením kvadratických nerovnic je metoda založená na rozložení kvadratického členu na součin dvojčlenů. Tento součin se poté posuzuje a dále řeší podle toho, jaké je znaménko nerovnosti. Řešení vychází z jednoduchých pravidel platných pro součin (součin dvou kladných čísel je kladné číslo, součin dvou záporných čísel je kladné číslo, součin kladného a záporného čísla je záporné číslo).
Dalším způsobem řešení kvadratických nerovnic je způsob založený na nalezení nulových bodů. Toto řešení je shodné s řešením uváděným u nerovnic v podílovém tvaru.

Např.: $x^2 + 3x - 4 > 0$

1. Rozložení na součin

$$(x - 1) \cdot (x + 4) > 0$$

2. Určení dvou "větví" řešení

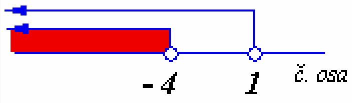
Součin dvou činitelů je kladný, když

a) oba činitelé jsou < 0

$$x - 1 < 0$$
$$x + 4 < 0$$

$x - 1 < 0 \rightarrow x < 1$

$x + 4 < 0 \rightarrow x < -4$



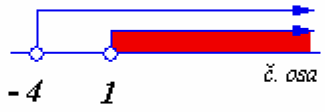
$x \in (-\infty; -4)$

b) oba činitelé jsou > 0

$$x - 1 > 0$$
$$x + 4 > 0$$

$x - 1 > 0 \rightarrow x > 1$

$x + 4 > 0 \rightarrow x > -4$

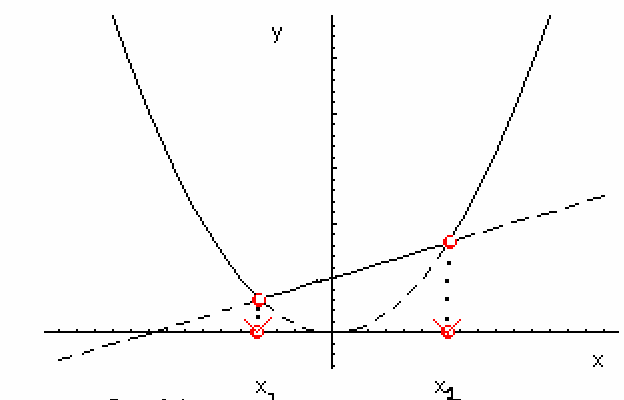


$x \in (1; +\infty)$

$$x \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$$

Příklad pro $x^2 + px + q > 0$ a $x^2 + px + q < 0$, tj. $x^2 > -px - q$ a $x^2 < -px - q$, pro $p,q \in R$.
Při grafickém řešení si nejprve kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$ upravíme na tvar x^2+px+q, kde $p,q \in R$,tj. vydělíme nerovnici kvadratickým členem, aby se koeficient kvadratického členu rovnal jedné.
Stejně jako při grafickém řešení kvadratické rovnice sestrojíme graf funkce $y = x^2$ (parabola) a graf funkce $y = -px - q$ (přímka). Má-li rovnice $x^2 + px + q = 0$ dva kořeny x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$, protíná přímka parabolu ve dvou bodech.

```
In[8]:= Show[%4, %7]
```

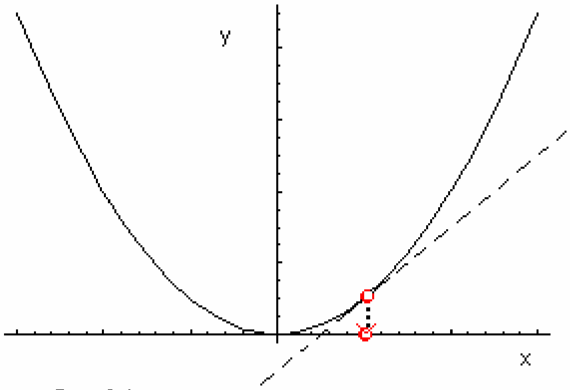



```
Out[8]= - Graphics -
```

Z obrázku je vidět, pro které hodnoty x leží příslušný bod paraboly $y = x^2$ nad, resp. Pod odpovídajícím bodem přímky $y = -px - q$. Na obrázku je část paraboly a část přímky, jejichž body leží nad (pod) odpovídajícími body druhé z těchto křivek, vyznačena souvisle (čárkovaně). Průsečíky obou křivek jsou

vyznačeny prázdnými kolečky, protože do žádné z těchto částí nepatří. Kdyby v nerovnicích byly neostré nerovnosti, byly by hodnoty x odpovídající průsečíkům řešeními obou nerovnic.
Podobně je to v případech, kdy rovnice $x^2 + px + q = 0$ má jeden (dvojnásobný) kořen

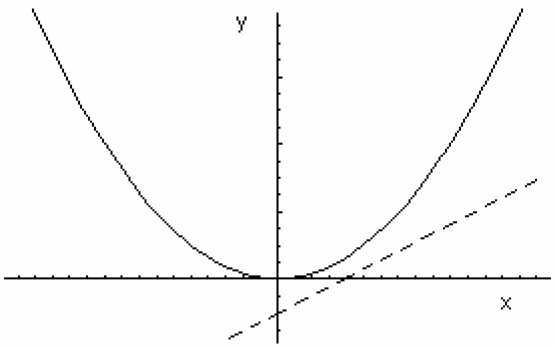
```
In[4]:= Plot[x^2, {x, -3, 3}]
```




```
Out[4]= - Graphics -
```

Nebo nemá žádný kořen:

```
In[11]:= Plot[x^2, {x, -3, 3}, PlotRange → {-2, 8}]
```




```
Out[11]= - Graphics -
```

Stejně jako kvadratickou rovnici, ani kvadratickou nerovnici graficky nevyřešíme přesně. Obrázek nám však dá představu o tom, jak množina všech řešení vypadá. Přesné řešení můžeme získat kombinací obrázku s výpočtem kořenů příslušné kvadratické rovnice.

Příklad 11: Graficky řešte nerovnici

a) $2x^2 + x - 4 \geq 0$

b) $x < -x^2 - 1$

c) $3x^2 \geq 2x - 2$

d) $1/4x^2 + x + 1 > 0$

e) $x^2 + 4x + 3 \leq 0$

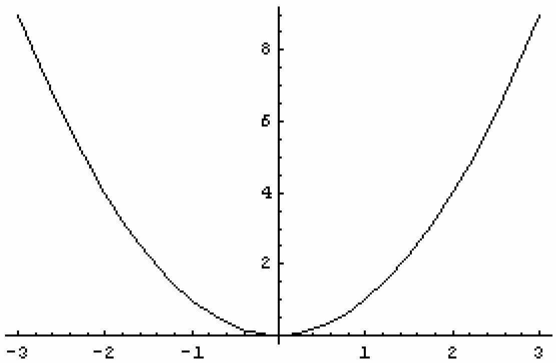
f) $2x^2 - 10 < x$

Řešení:

a) $2x^2 + x - 4 \geq 0$

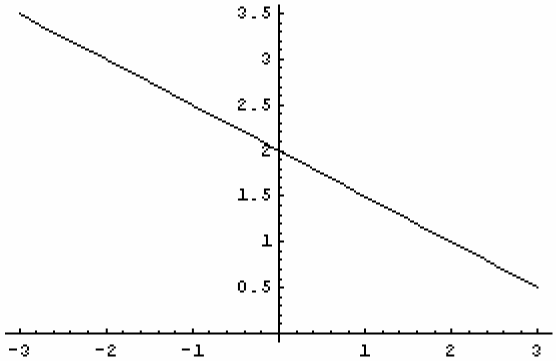
Nerovnici upravíme na tvar $x^2 \geq -\frac{1}{2}x + 2$. Máme určit, pro které hodnoty x leží příslušný bod paraboly $y = x^2$ nad odpovídajícím bodem přímky $y = -\frac{1}{2}x + 2$ nebo „ve stejné výšce“ jako tento bod.

```
In[13]:= Plot[x^2, {x, -3, 3}]
```



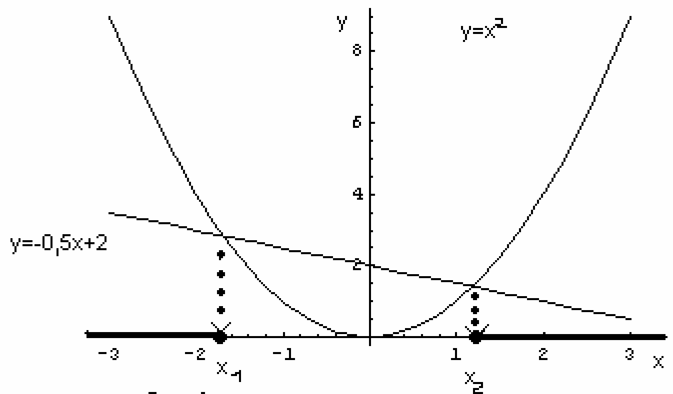
```
Out[13]= - Graphics -
```

```
In[14]:= Plot[-0.5 x + 2, {x, -3, 3}]
```



```
Out[14]= - Graphics -
```

```
In[15]:= Show[%13, %14]
```




```
Out[15]= - Graph -
```

Vidíme, že to platí pro $x \in (-\infty, x_1\rangle \cup \langle x_2, +\infty)$, kde x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) jsou kořeny rovnice $2x^2 + x - 4 = 0$. Z obrázku vyčteme, že $x_1 \approx -1{,}7$, $x_2 \approx 1{,}2$, přesným výpočtem dostaneme:

$x_1 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{33}$, $x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{33}$

```
In[18]:= presne = Solve[2 x^2 + x - 4 == 0, x]
```

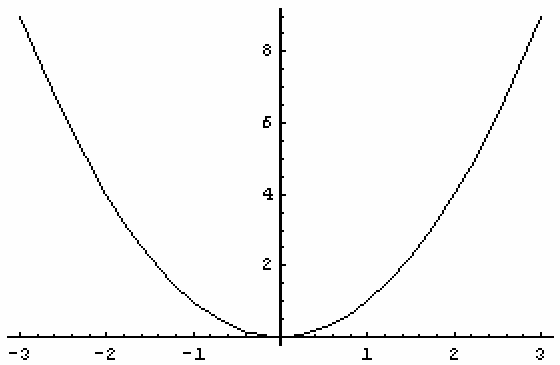
$$\text{Out[18]= } \left\{\left\{x \to \frac{1}{4}\left(-1 - \sqrt{33}\right)\right\}, \left\{x \to \frac{1}{4}\left(-1 + \sqrt{33}\right)\right\}\right\}$$

Množina všech řešení dané nerovnice je $\left(-\infty, -1/4 - 1/4\sqrt{33}\right\rangle \cup \left\langle -1/4 + 1/4\sqrt{33}, +\infty\right)$

b) $x < -x^2 - 1$

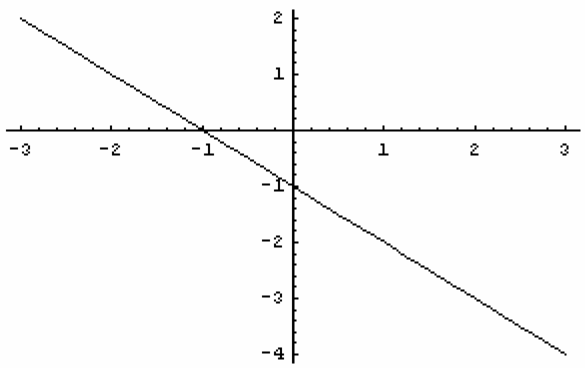
Nerovnici upravíme na tvar $x^2 < -x - 1$ a sestrojíme parabolu $y = x^2$ a přímku $y = -x - 1$

```
In[19]:= Plot[x^2, {x, -3, 3}]
```



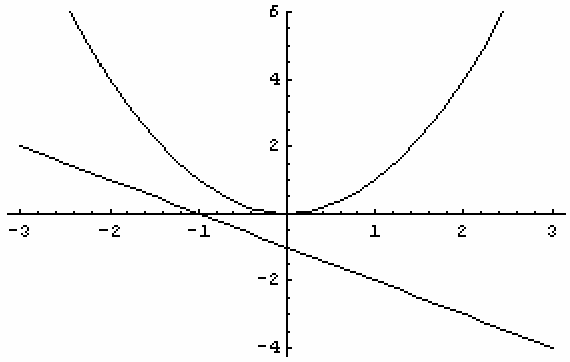
```
Out[19]= - Graphics -
```

```
In[20]:= Plot[-x - 1, {x, -3, 3}]
```



```
Out[20]= - Graphics -
```

In[21]:= **Show[%19, %20]**



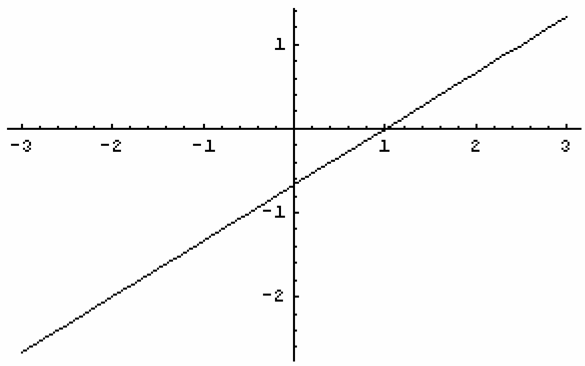
Out[21]= - Graphics -

Vidíme, že daná nerovnice nemá žádné řešení.

c) $3x^2 \geq 2x - 2$

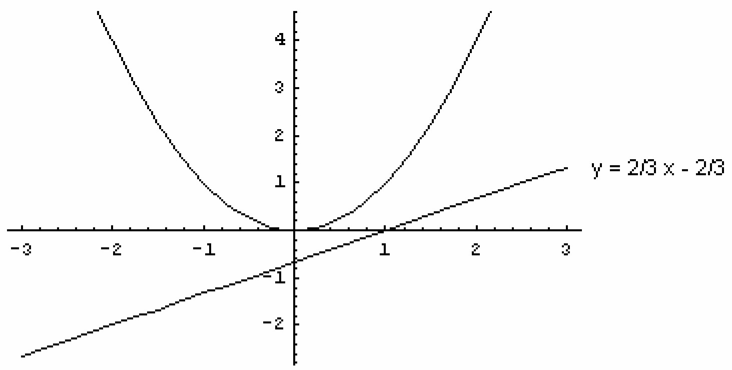
$3x^2 - 2x + 2 \geq 0 / :3$
$x^2 - 2/3x + 2/3 \geq 0$
$y = x^2$ a $y = 2/3x - 2/3$

In[22]:= **Plot[2 / 3 x - 2 / 3, {x, -3, 3}]**



Out[22]= - Graphics -

In[23]:= **Show[%19, %22]**



Out[23]= - Graphics -

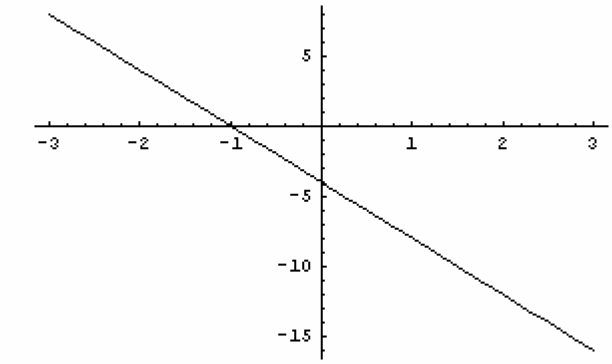
Vidíme, že nerovnice má nekonečně mnoho řešení.

d) $1/4x^2 + x + 1 > 0$

$y = x^2$

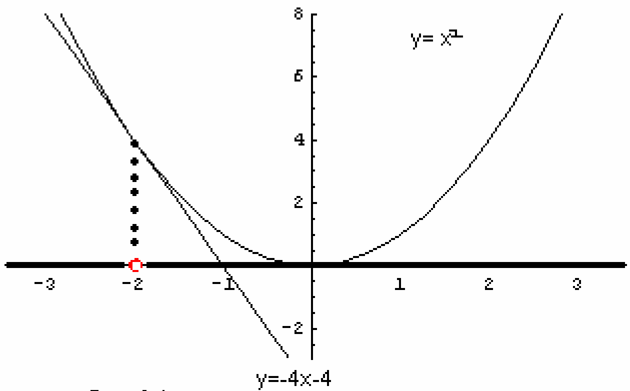
$y = -4x-4$

In[26]:= `Plot[-4 x - 4, {x, -3, 3}]`



Out[26]= - Graphics -

In[36]:= `Show[%30, %26]`



Out[36]= - Graphics -

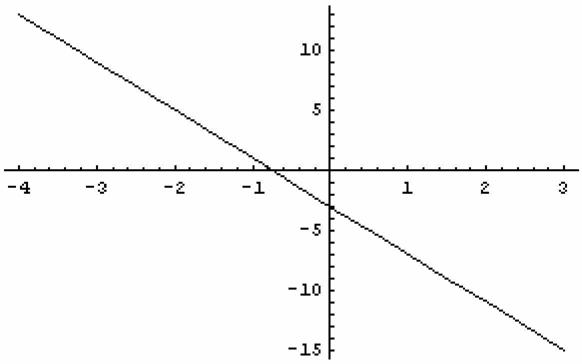
$R \setminus \{-2\}$

e) $x^2 + 4x + 3 \leq 0$

$y = x^2$

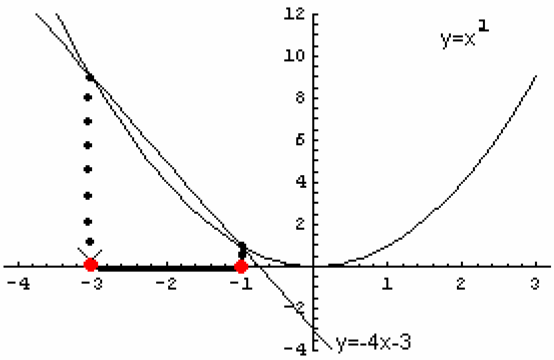
$y = -4x - 3$

```
In[43]:= Plot[-4 x - 3, {x, -4, 3}]
```



```
Out[43]= - Graphics -
```

```
In[45]:= Show[%44, %43]
```




```
Out[45]= - Graphics -
```

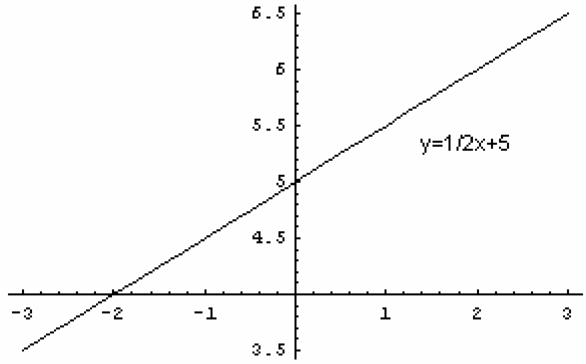
$\langle -3,-1 \rangle$

f) $2x^2 - 10 < x$

$y = x^2$

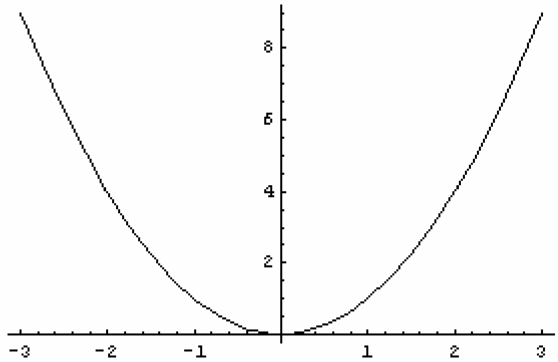
$y = 1/2x + 5$

In[46]:= `Plot[1/2 x + 5, {x, -3, 3}]`



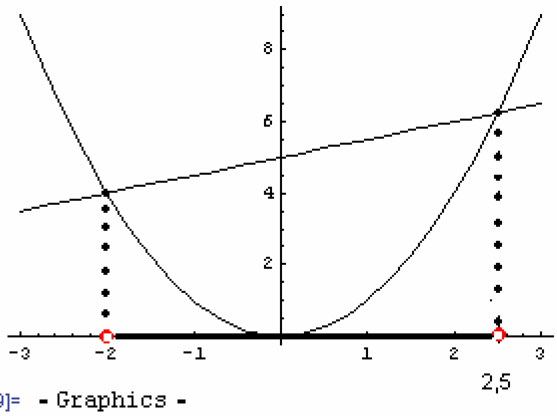
Out[46]= - Graphics -

In[47]:= `Plot[x^2, {x, -3, 3}]`



Out[47]= - Graphics -

In[49]:= `Show[%46, %47]`



Out[49]= - Graphics -

$$\left(-2; \frac{5}{2}\right)$$

Funkce s absolutní hodnotou

Příklad 12: Sestrojte grafy lineárních funkcí s absolutní hodnotou

a) $h: \quad y = |x|, \; x \in R$

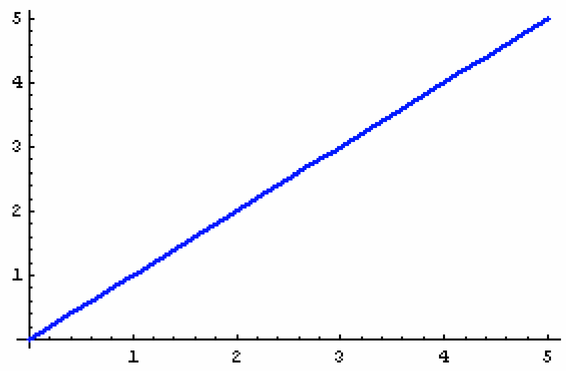
Podle definice absolutní hodnoty reálného čísla platí:

- je-li $x \geq 0$, pak $|x| = x$
- je-li $x < 0$, pak $|x| = -x$.

Funkci $h: y = |x|$ můžeme vyjádřit pomocí dvou funkcí h_1 a h_2.

$h_1: \quad y = x, \quad x \in \langle 0, \infty)$

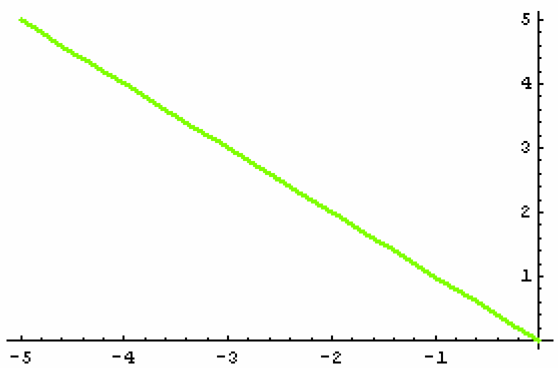
```
Plot[{x}, {x, 0, 5},
 PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0.65]}}]
```



```
- Graphics -
```

$h_2: \quad y = -x, \quad x \in (-\infty, 0\rangle$

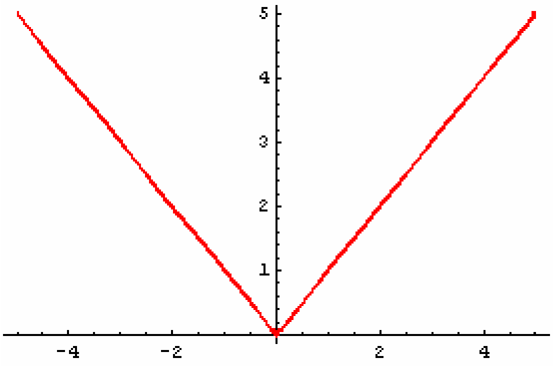
```
Plot[{-x}, {x, -5, 0},
 PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0.25]}}]
```



```
- Graphics -
```

Potom je grafem funkce $h = h_1 \cup h_2$.

```
Plot[{Abs[x]}, {x, -5, 5},
 PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0]}}]
```

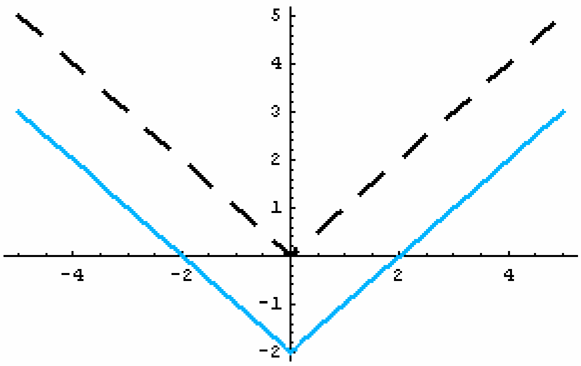


- Graphics -

b) $y = |x| - 2, x \in R$

Nulový bod: $x = 0$. Pro $x \in \langle 0, \infty)$ platí $|x| - 2 = x - 2$, pro $x \in (-\infty, 0\rangle$ platí $|x| - 2 = -x - 2$. Graf funkce $y = |x| - 2$ je vzhledem ke grafu funkce $y = |x|$ posunut o 2 ve směru záporné poloosy *y*.

```
Plot[{Abs[x], Abs[x] - 2}, {x, -5, 5},
 PlotStyle → {{Thickness[0.008], Dashing[{0.05}]},
   {Thickness[0.008], Hue[0.55]}}]
```

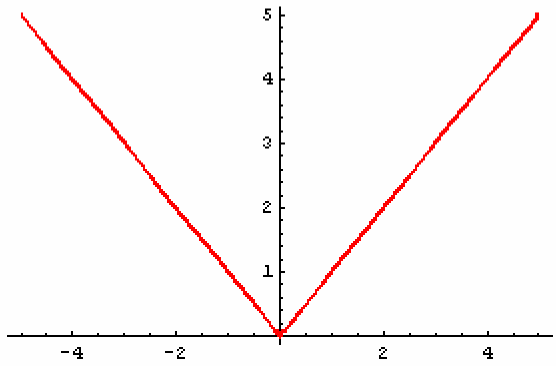


- Graphics -

c) $y = |x + 3|, x \in R$

Sestrojíme graf funkce $y = |x|$.

```
Plot[{Abs[x]}, {x, -5, 5},
 PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0]}}]
```

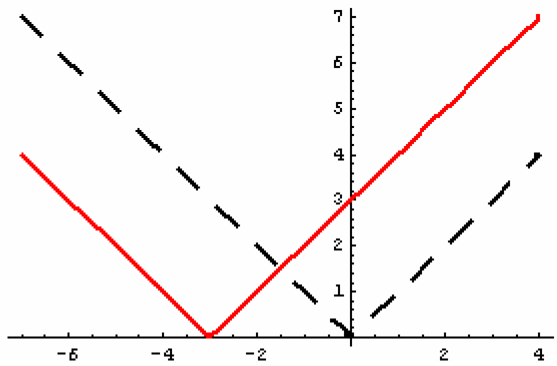



```
- Graphics -
```

Nulový bod: $x+3=0 \quad \Rightarrow \quad x=-3$.

Graf funkce $y=|x+3|$ je vzhledem ke grafu funkce $y=|x|$ posunut o 3 ve směru záporné poloosy *x*.

```
In[3]:= Plot[{Abs[x], Abs[x + 3]}, {x, -7, 4},
         PlotStyle → {{Thickness[0.008], Dashing[{0.05}]},
           {Thickness[0.008], Hue[0]}}]
```

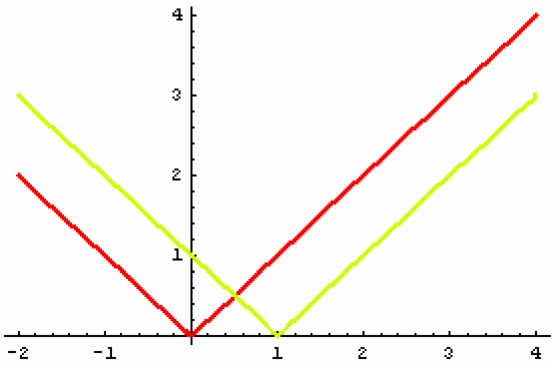



```
Out[3]= - Graphics -
```

d) $y=3-|x-1|, x \in R$

Sestrojíme grafy funkcí $y=|x|$ a $y=|x-1|$.

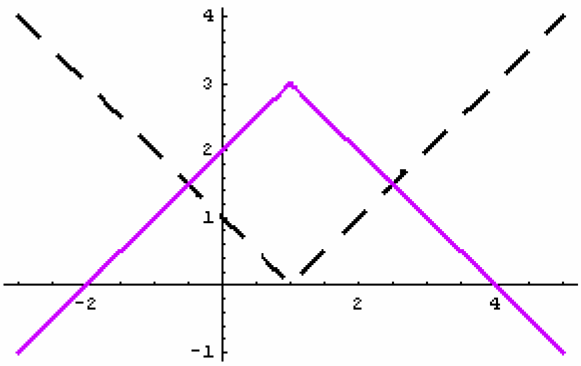
```
Plot[{Abs[x], Abs[x - 1]}, {x, -2, 4},
  PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0]},
    {Thickness[0.008], Hue[0.2]}}]
```




```
- Graphics -
```

Graf funkce $y = -|\ x - 1\ |$ je s grafem funkce $y = |\ x - 1\ |$ souměrně sdružený podle osy *x*. Graf funkce $y = 3 - |x - 1|$ je vzhledem ke grafu funkce $y = -|\ x - 1\ |$ posunut o 3 ve směru kladné poloosy *y*.

```
In[4]:= Plot[{Abs[x - 1], 3 - Abs[x - 1]}, {x, -3, 5},
          PlotStyle → {{Thickness[0.008], Dashing[{0.05}]},
            {Thickness[0.008], Hue[0.8]}}]
```




```
Out[4]= - Graphics -
```

Příklad 13: Sestrojte graf funkce

f: $y = |\ 4 - 2x\ | - |\ x + 1\ |$ pro $-5 \le x \le 5$.

Nejprve určíme nulové body:

$$4 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

$$x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$$

Tyto nulové body rozdělí množinu $\langle -5, 5 \rangle$ na tři intervaly:

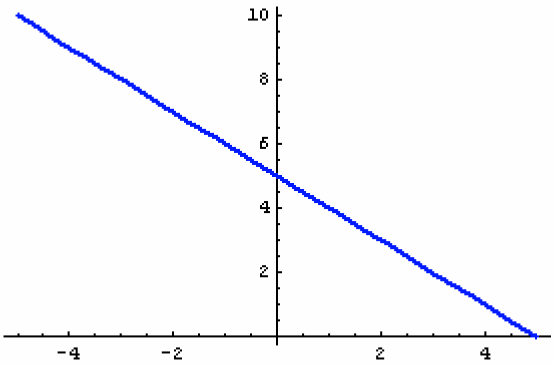
$I_1 = \langle -5, -1 \rangle$, $I_2 = \langle -1, 2 \rangle$ a $I_3 = \langle 2, 5 \rangle$.

Pro funkci f platí $f = f_1 \cup f_2 \cup f_3$, kde f_1, f_2, f_3 jsou lineární funkce. Získáme je tak, že v každém z intervalů I_1 až I_3 vyjádříme funkci f „bez absolutních hodnot“. Viz následující tabulka.

	$\mathbf{I_1} = \langle -5, -1 \rangle$	$\mathbf{I_2} = \langle -1, 2 \rangle$	$\mathbf{I_3} = \langle 2, 5 \rangle$
$\lvert 4-2x \rvert$	$4-2x$	$4-2x$	$-(4-2x)$
$\lvert x+1 \rvert$	$-(x+1)$	$x+1$	$x+1$
$\lvert 4-2x \rvert - \lvert x+1 \rvert$	$4-2x+(x+1)$	$4-2x-(x+1)$	$-(4-2x)-(x+1)$
	$\boldsymbol{f_1}$**:** $\boldsymbol{y = 5 - x}$ pro $x \in I_1$	$\boldsymbol{f_2}$**:** $\boldsymbol{y = 3 - 3x}$ pro $x \in I_2$	$\boldsymbol{f_3}$**:** $\boldsymbol{y = x - 5}$ pro $x \in I_3$

f_1: $y = 5 - x$, $x \in \langle -5, 5 \rangle$

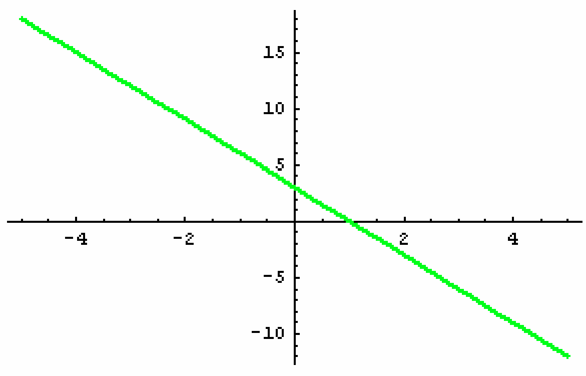
```
Plot[{5 - x}, {x, -5, 5},
 PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0.65]}}]
```



- Graphics -

f_2: $y = 3 - 3x$, $x \in \langle -5, 5 \rangle$

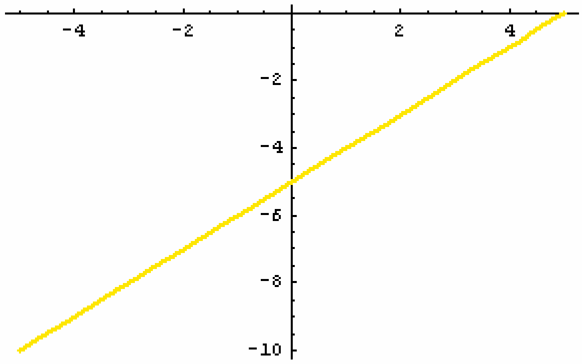
```
Plot[{3 - 3 x}, {x, -5, 5},
 PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0.35]}}]
```



- Graphics -

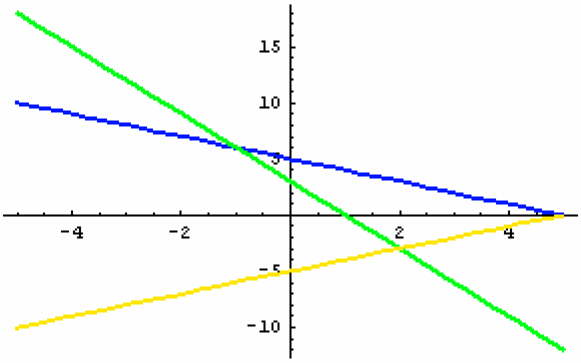
f_3: $y = x - 5$, $x \in \langle -5, 5 \rangle$

```
Plot[{x - 5}, {x, -5, 5},
 PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0.15]}}]
```



- Graphics -

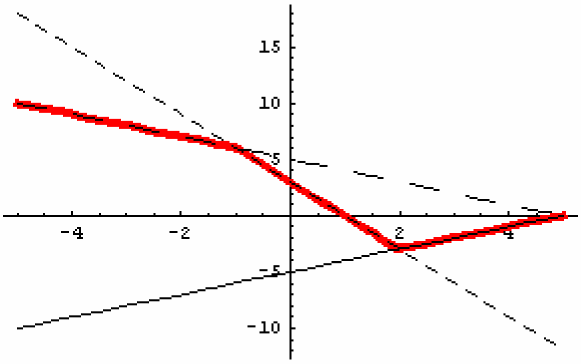
```
Plot[{5 - x, 3 - 3 x, x - 5}, {x, -5, 5},
 PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0.65]},
   {Thickness[0.008], Hue[0.35]},
   {Thickness[0.008], Hue[0.15]}}]
```



- Graphics -

$f = f_1 \cup f_2 \cup f_3,\ x \in \langle -5, 5 \rangle$

In[15]:=
```
Plot[{Abs[4 - 2 x] - Abs[x + 1], 5 - x, 3 - 3 x, x - 5},
  {x, -5, 5},
  PlotStyle → {{Thickness[0.014], Hue[0]},
    {Dashing[{0.05}]}, {Dashing[{0.02}]},
    {Dashing[{0}]}}]
```



Out[15]= - Graphics -

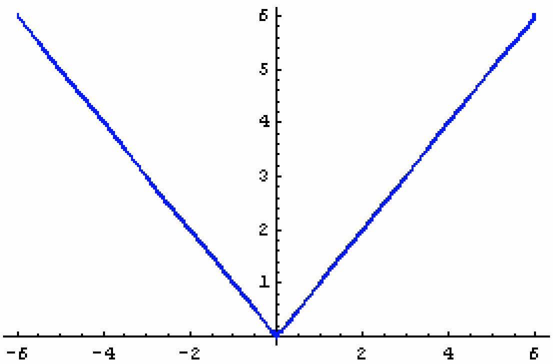
Příklad 14: Sestrojte graf funkce

f: $y = | |x+1| - 3 |$. Proveďte v *R* diskusi řešitelnosti rovnice $| |x+1| - 3 | = a$, kde *a* je reálný parametr.

Graf funkce *f* získáme tak, že postupně sestrojujeme grafy funkcí:

$f_1: \quad y = |x|$

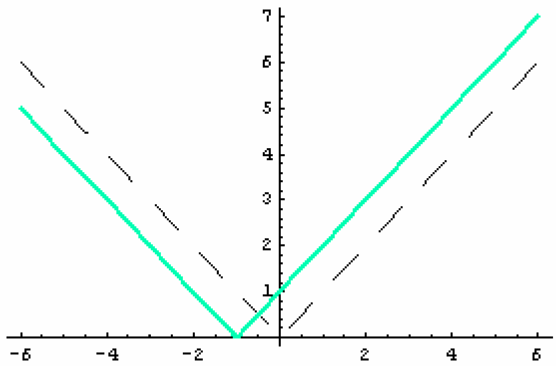
```
Plot[{Abs[x]}, {x, -6, 6},
 PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0.65]}}]
```



- Graphics -

$f_2: \quad y = |x+1|$

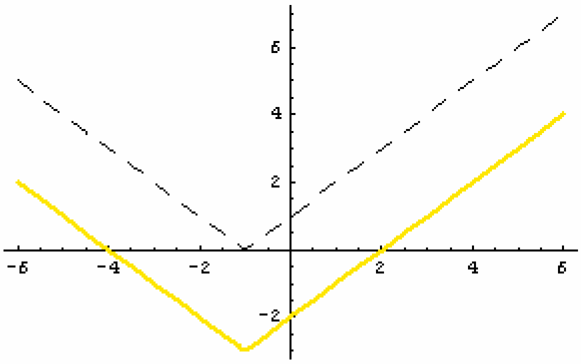
```
Plot[{Abs[x], Abs[x + 1]}, {x, -6, 6},
 PlotStyle → {{Thickness[0.007], Dashing[{0.06}]},
   {Thickness[0.008], Hue[0.45]}}]
```



- Graphics -

$f_3: \quad y = |x+1| - 3$

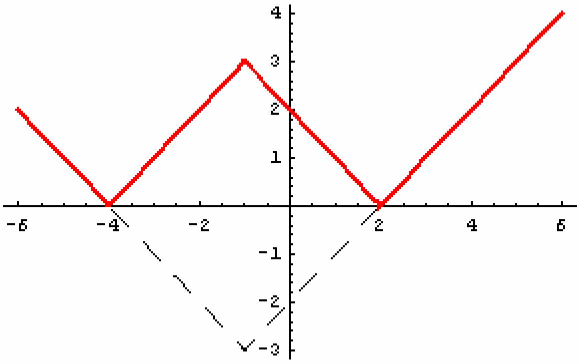
```
Plot[{Abs[x + 1], Abs[x + 1] - 3}, {x, -6, 6},
 PlotStyle → {{Thickness[0.006], Dashing[{0.03}]},
   {Thickness[0.008], Hue[0.15]}}]
```



- Graphics -

$f: \quad y = \left| \left| x+1 \right| - 3 \right|$

```
Plot[{Abs[x + 1] - 3, Abs[Abs[x + 1] - 3]}, {x, -6, 6},
 PlotStyle → {{Thickness[0.007], Dashing[{0.04}]},
   {Thickness[0.008], Hue[0]}}]
```



```
- Graphics -
```

Z obrázku lze snadno odvodit počet řešení rovnice | |*x* +1| - 3 | = *a*.

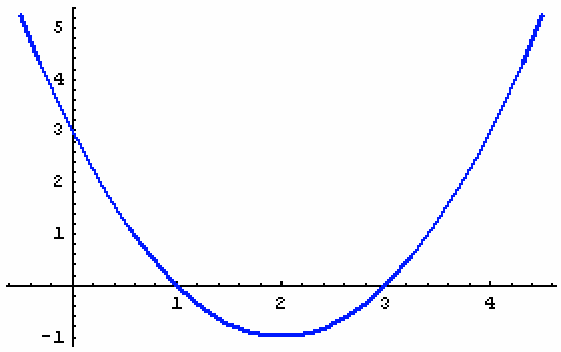
- je-li $a \in (-\infty, 0)$, pak rovnice nemá řešení
- je-li *a* = 0, pak má rovnice dva kořeny $[x_1 = -4,\ x_2 = 2]$
- je-li $a \in (0, 3)$, pak má rovnice čtyři kořeny
- je-li a = 3, pak má rovnice tři kořeny
- je-li $a \in (3, \infty)$, pak má rovnice dva kořeny

Příklad 15: Sestrojte graf kvadratické funkce s absolutní hodnotou

a) $g: \quad y = \left| x^2 - 4x + 3 \right|$

Výraz $x^2 - 4x + 3 = (x^2 - 4x + 4) - 4 + 3 = (x-2)^2 - 1$, proto lze kvadratickou funkci $f: \quad y = x^2 - 4x + 3$ vyjádřit ve tvaru $f: \quad y = (x-2)^2 - 1$.
Minimum této funkce nastává pro *x* = 2 a má hodnotu *y* = -1. Vrcholem paraboly je bod [2, -1].

```
In[33]:= Plot[{x^2 - 4 x + 3}, {x, -0.5, 4.5},
          PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0.65]}}]
```

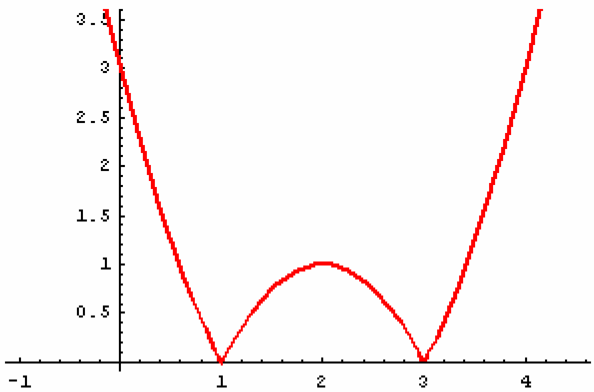



```
Out[33]= - Graphics -
```

Z definice absolutní hodnoty reálného čísla vyplývá:

- je-li $x^2 - 4x + 3 \geq 0$, pak $\left| x^2 - 4x + 3 \right| = x^2 - 4x + 3$, tj. je-li $f(x) \geq 0$, pak $f(x) = g(x)$. Tedy pro $f(x) \geq 0$ je graf hledané funkce g totožný s grafem funkce f.
- je-li $x^2 - 4x + 3 \leq 0$, pak $\left| x^2 - 4x + 3 \right| = -(x^2 - 4x + 3)$, tj. je-li $f(x) \leq 0$, pak $g(x) = - f(x)$. To znamená, že pro $f(x) \leq 0$ je graf funkce g souměrně sdružený s grafem funkce f podle osy x.

```
Plot[{Abs[x^2 - 4 x + 3]}, {x, -1, 4.5},
 PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0]}}]
```

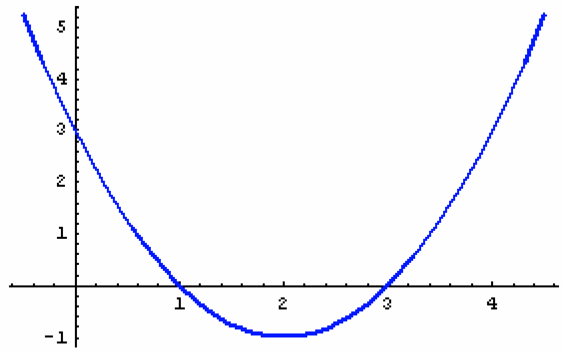



```
- Graphics -
```

b) $h: \quad y = x^2 - 4\left| x \right| + 3$

Je-li $x \geq 0$, pak $x^2 - 4\left| x \right| + 3 = x^2 - 4x + 3$. Pro nezáporné hodnoty x je graf hledané funkce h totožný s grafem funkce $f: \quad y = x^2 - 4x + 3$.

```
Plot[{x^2 - 4 x + 3}, {x, -0.5, 4.5},
 PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0.65]}}]
```

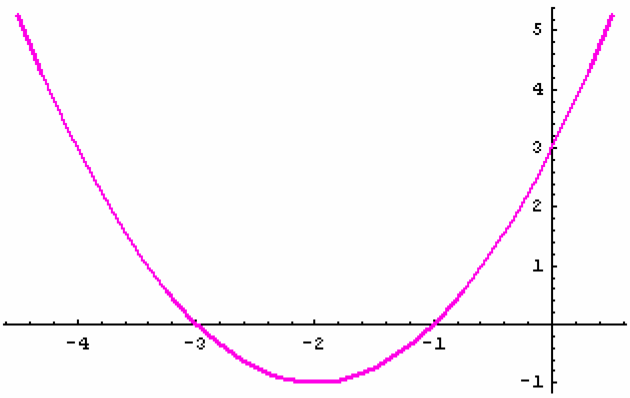


- Graphics -

Je-li $x \leq 0$, pak $x^2 - 4|x| + 3 = x^2 + 4x + 3$.

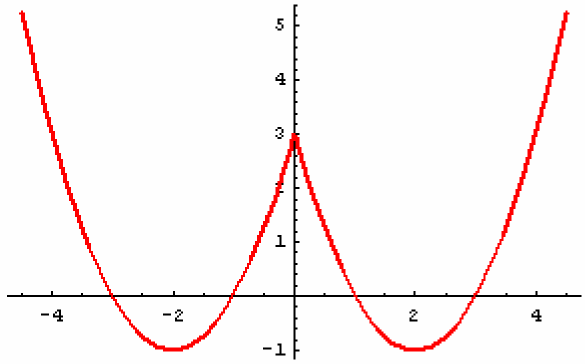
Protože platí $x^2 + 4x + 3 = (x^2 + 4x + 4) - 4 + 3 = (x + 2)^2 - 1$, lze kvadratickou funkci f': $y = x^2 + 4x + 3$ také zapsat ve tvaru f': $y = (x + 2)^2 - 1$. Tato parabola má vrchol v bodu [-2, -1].

```
In[35]:= Plot[{x^2 + 4 x + 3}, {x, -4.5, 0.5}, PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0.85]}}]
```



Z toho vyplývá, že pro všechny záporné hodnoty x je graf hledané funkce g totožný s grafem funkce f'. Také můžeme říci, že pro každé $x \leq 0$ je graf funkce h souměrně sdružený s grafem funkce f podle osy y.

```
Plot[{x^2 - 4 * Abs[x] + 3}, {x, -4.5, 4.5}, PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0]}}]
```



- Graphics -

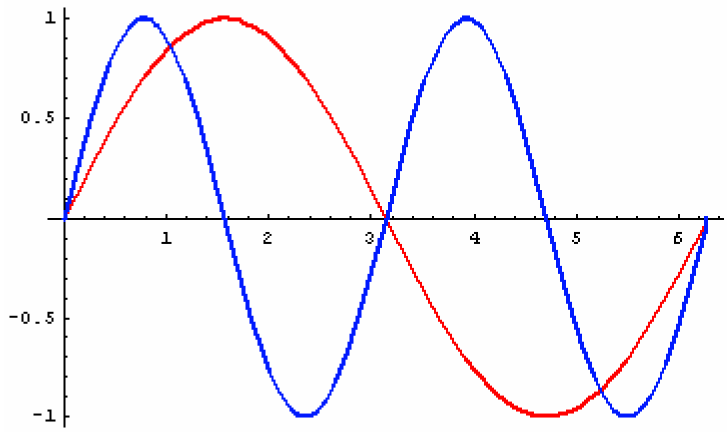
Goniometrické funkce

Příklad 16: Sestrojte grafy goniometrických funkcí

a porovnejte jejich vlastnosti s vlastnostmi funkce $y = \sin x$.

a) Sestrojíme graf funkce $f: \quad y = \sin x$ a graf funkce $g: \quad y = \sin 2x$.

```
Plot[{Sin[x], Sin[2 x]}, {x, 0, 2 π},
 PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0]},
   {Thickness[0.008], Hue[0.65]}}]
```

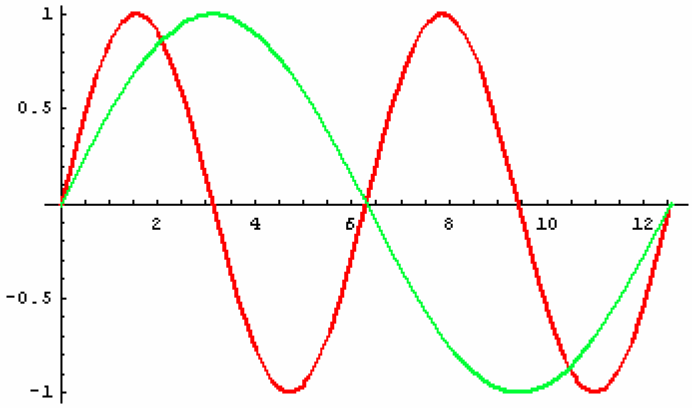


- Graphics -

Z grafu vyplývá, že obě funkce jsou periodické. Funkce $f: \quad y = \sin x$ s periodou 2π. Funkce s dvojnásobným argumentem, tj. $g: \quad y = \sin 2x$ má poloviční periodu (π).

Sestrojíme graf funkce $f: \quad y = \sin x$ a graf funkce $h: \quad y = \sin \frac{x}{2}$.

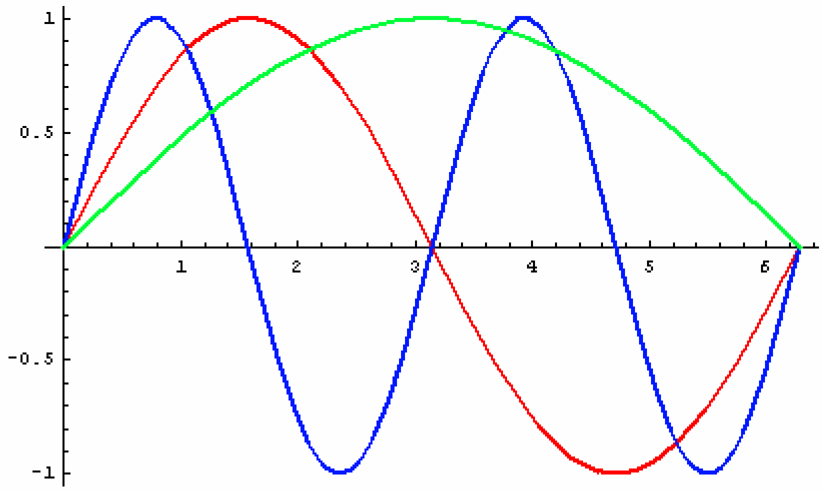
```
Plot[{Sin[x], Sin[x/2]}, {x, 0, 4 π},
 PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0]},
   {Thickness[0.008], Hue[0.37]}}]
```



- Graphics -

Funkce h: $y = \sin\frac{x}{2}$ je také periodická s periodou 4π .

```
Plot[{Sin[x], Sin[2 x], Sin[x/2]}, {x, 0, 2 π},
 PlotStyle → {{Thickness[0.006], Hue[0]},
   {Thickness[0.006], Hue[0.65]},
   {Thickness[0.006], Hue[0.37]}}]
```

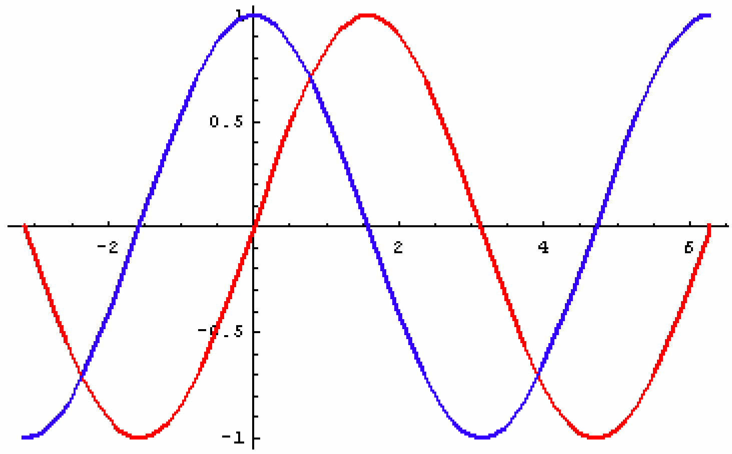


- Graphics -

Všechny tři funkce jsou definovány na množině reálných čísel, tj. D(f) = D(g) = D(h) = ***R***. Jsou shora i zdola omezené, H(f) = H(g) = H(h) = $\langle -1, 1 \rangle$.

b) Sestrojíme graf funkce f: $y = \sin x$ a graf funkce g: $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

```
Plot[{Sin[x], Sin[x + π/2]}, {x, -π, 2 π},
 PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0]},
   {Thickness[0.008], Hue[0.7]}}]
```

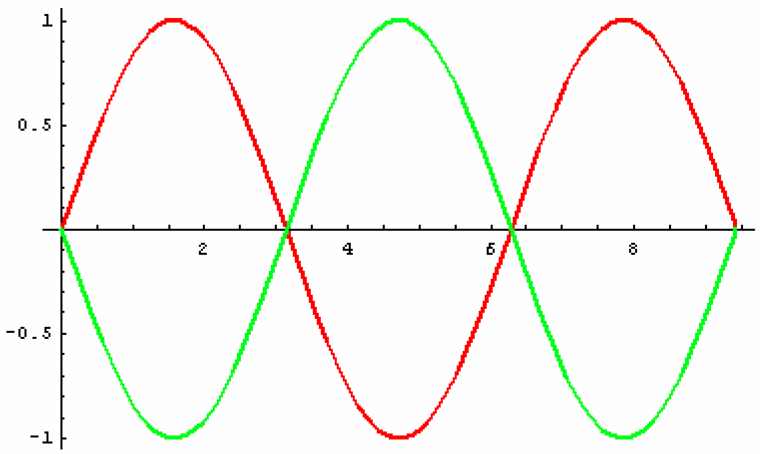


- Graphics -

Graf funkce $g: \quad y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ je oproti grafu funkce $f: \quad y = \sin x$ posunut o $\frac{\pi}{2}$ ve směru záporné poloosy *x*.

Sestrojíme graf funkce $f: \quad y = \sin x$ a graf funkce $h: \quad y = \sin(x - \pi)$.

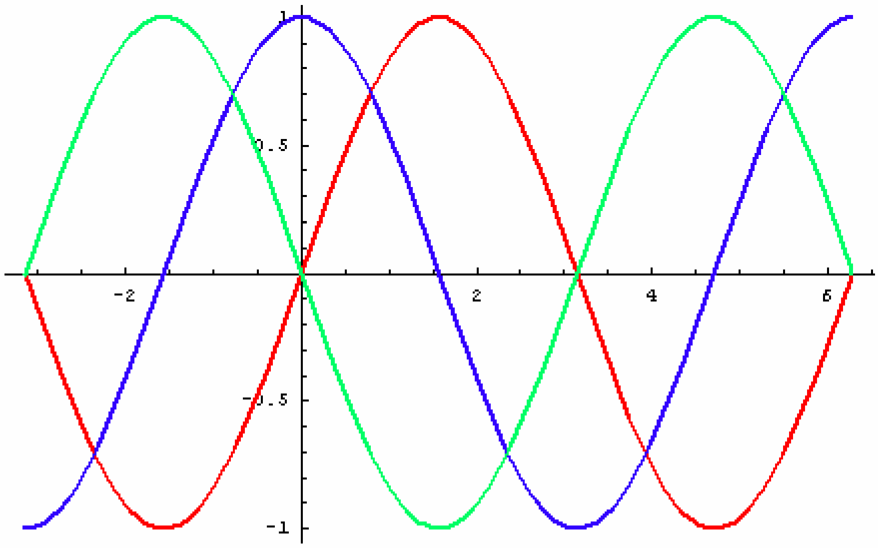
```
Plot[{Sin[x], Sin[x - π]}, {x, 0, 3 π},
 PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0]},
   {Thickness[0.008], Hue[0.35]}}]
```



- Graphics -

Graf funkce $h: \quad y = \sin(x - \pi)$ je vzhledem ke grafu funkce $f: \quad y = \sin x$ posunut o π ve směru kladné poloosy *x*.

```
Plot[{Sin[x], Sin[x + π/2], Sin[x - π]}, {x, -π, 2 π},
 PlotStyle → {{Thickness[0.005], Hue[0]}, {Thickness[0.005], Hue[0.7]},
   {Thickness[0.005], Hue[0.4]}}]
```

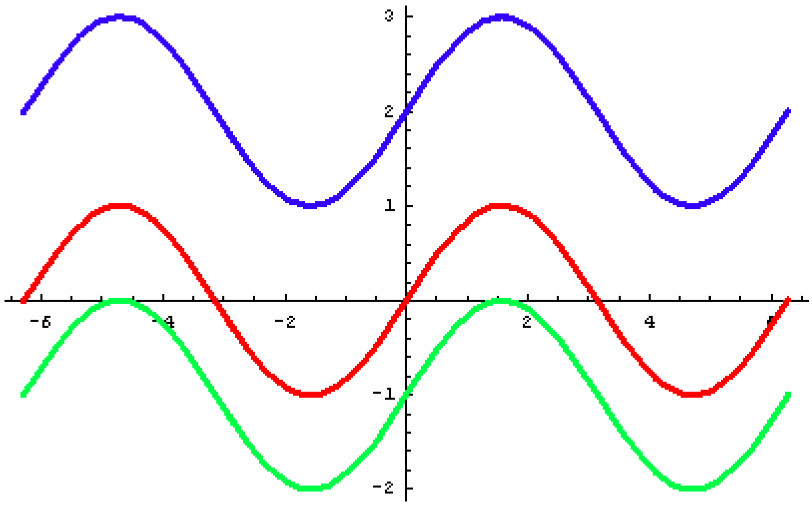


- Graphics -

Všechny tři funkce jsou periodické s periodou 2π. Jsou shora i zhola omezené. Definiční obor D = ***R***, obor hodnot H = $\langle -1, 1 \rangle$.

c) Sestrojíme grafy funkcí $f: \quad y = \sin x$, $g: \quad y = \sin x + 2$ a $h: \quad y = \sin x - 1$.

```
Plot[{Sin[x], Sin[x] + 2, Sin[x] - 1}, {x, -2 π, 2 π},
 PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0]},
   {Thickness[0.008], Hue[0.7]}, {Thickness[0.008], Hue[0.38]}}]
```

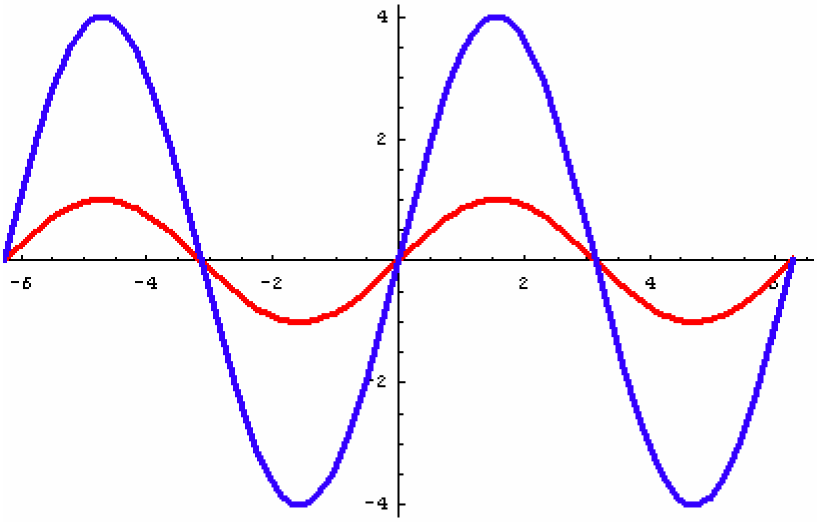


- Graphics -

Graf funkce $g: \quad y = \sin x + 2$ je oproti grafu funkce $f: \quad y = \sin x$ posunut o 2 ve směru kladné poloosy *y* a graf funkce $h: \quad y = \sin x - 1$ je posunut o 1 v opačném směru.
Funkce jsou periodické s periodou 2π. Jsou omezené shora i zdola. Definované na množině reálných čísel. Liší se jejich obory hodnot. H(*f*) = $\langle -1, 1 \rangle$, H(*g*) = $\langle 1, 3 \rangle$ a H(*h*) = $\langle -2, 0 \rangle$.

d) Sestrojíme graf funkce $f: \quad y = \sin x$ a graf funkce $g: \quad y = 4\sin x$.

```
Plot[{Sin[x], 4 * Sin[x]}, {x, -2 π, 2 π},
 PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0]}, {Thickness[0.008], Hue[0.7]}}]
```

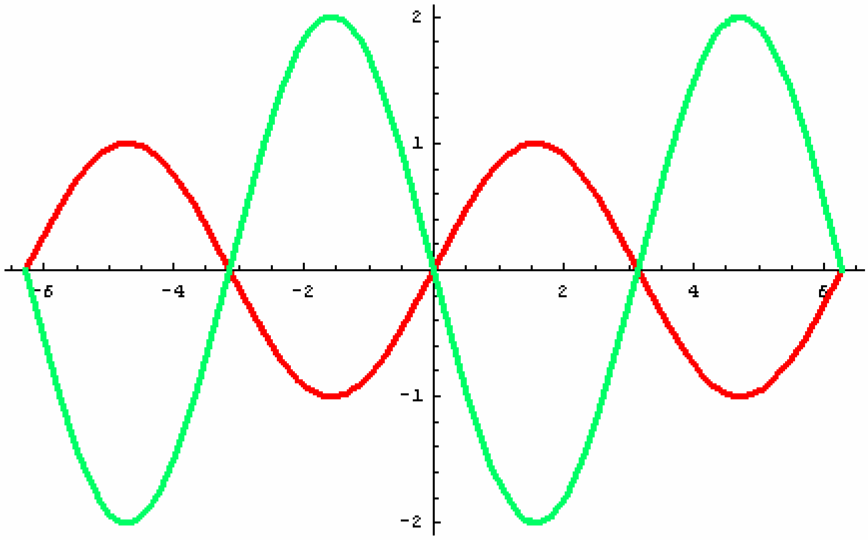



```
- Graphics -
```

Obě funkce nabývají pro stejná x svých maxim a minim. Funkce $g: \quad y = 4\sin x$ nabývá maximální hodnoty $y_{\max} = 4$ a minimální hodnoty $y_{\min} = -4$.

Sestrojíme graf funkce $f: \quad y = \sin x$ a graf funkce $h: \quad y = -2\sin x$.

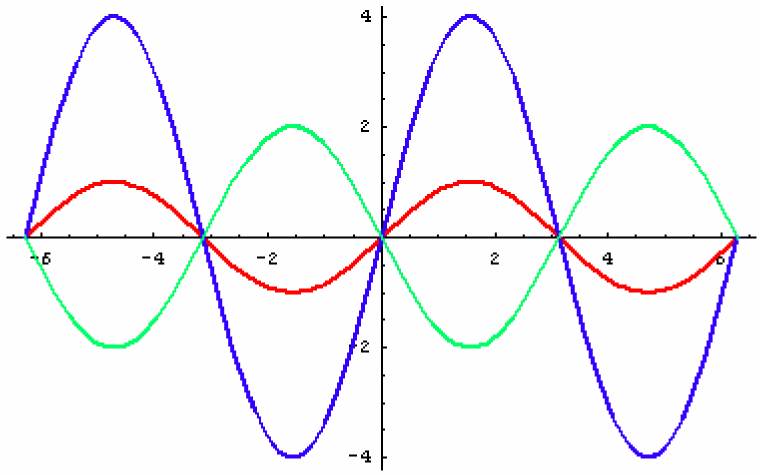
```
Plot[{Sin[x], -2 * Sin[x]}, {x, -2 π, 2 π},
 PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0]}, {Thickness[0.008], Hue[0.4]}}]
```




```
- Graphics -
```

V bodech, ve kterých nabývá funkce $f: \quad y = \sin x$ svého maxima, nabývá funkce $h: \quad y = -2\sin x$ minima. Obor hodnot H(h) = $\langle -2, 2 \rangle$.

```
Plot[{Sin[x], 4*Sin[x], -2*Sin[x]}, {x, -2π, 2π},
 PlotStyle→{{Thickness[0.008], Hue[0]}, {Thickness[0.008], Hue[0.7]},
   {Thickness[0.008], Hue[0.4]}}]
```



- Graphics -

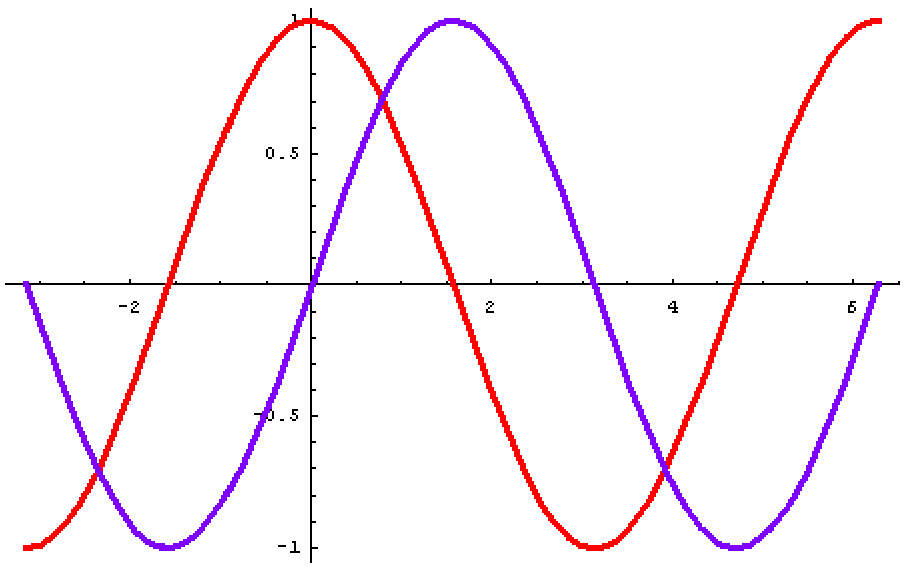
Funkce jsou periodické s periodou 2π . Osu x protínají ve stejných bodech ($k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$).

Příklad 17: Sestrojte grafy goniometrických funkcí

a srovnejte vlastnosti těchto funkcí s vlastnostmi funkce $y = \cos$ x.

a) Sestrojíme graf funkce $f: \quad y = \cos x$ a funkce $g: \quad y = \sin x$.

```
Plot[{Cos[x], Sin[x]}, {x, -π, 2π},
 PlotStyle→{{Thickness[0.008], Hue[0]},
   {Thickness[0.008], Hue[0.75]}}]
```

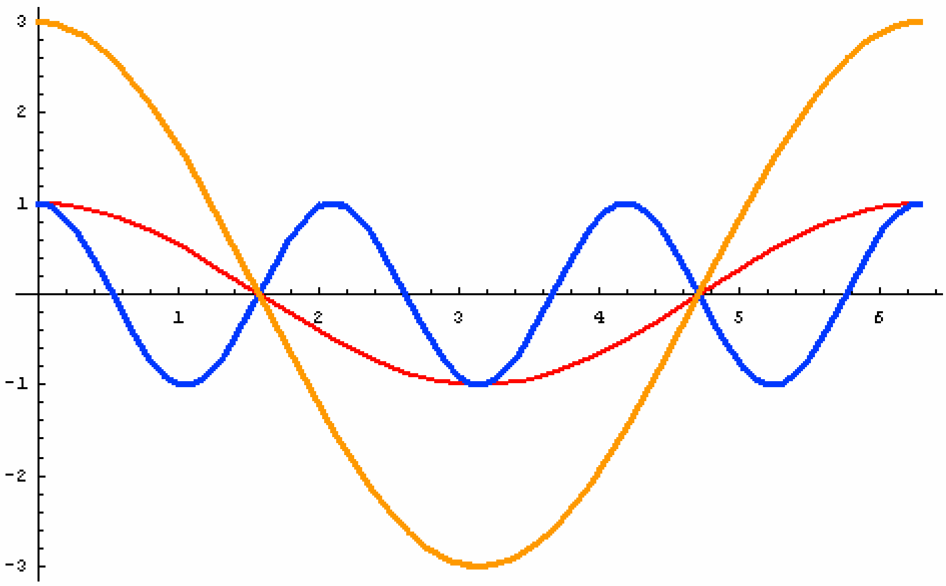


- Graphics -

Funkce sinus je lichá, funkce kosinus je sudá v definičním oboru $\boldsymbol{R}$. Obě tyto goniometrické funkce jsou periodické s periodou 2π . Obě funkce jsou omezené. Oborem hodnot je interval $\langle -1, 1 \rangle$. Sinus nabývá maxima $y_{\max} = 1$ pro $x = (4k+1)\frac{\pi}{2}$ a kosinus pro $x = 2k\pi$. Minimální hodnoty $y_{\min} = -1$ nabývá funkce sinus pro $x = (4k-1)\frac{\pi}{2}$ a funkce kosinus pro $x = (2k-1)\pi$.

b) Sestrojíme grafy funkcí $f: \quad y = \cos x$, $g: \quad y = \cos 3x$ a $h: \quad y = 3\cos x$.

```
Plot[{Cos[x], Cos[3 x], 3 * Cos[x]}, {x, 0, 2 π},
 PlotStyle → {{Hue[0.005], Thickness[0.005]},
   {Hue[0.63], Thickness[0.008]}, {Hue[0.1], Thickness[0.008]}}]
```

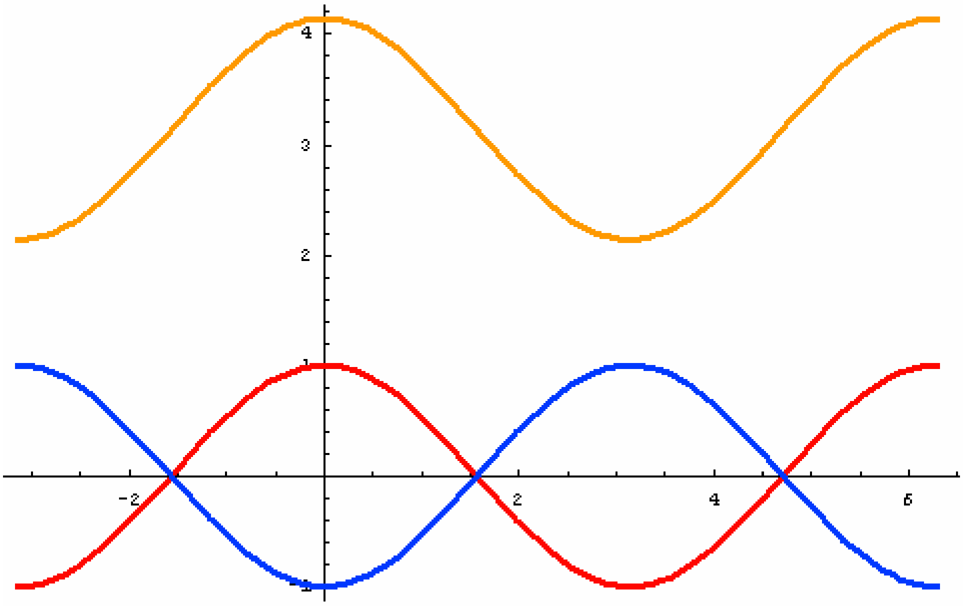



```
- Graphics -
```

Funkce $h: \quad y = 3\cos x$ se od funkce *f* a *g* liší oborem hodnot. H(*f*) = H(*g*) = $\langle -1, 1 \rangle$, kdežto H(*h*) = $\langle -3, 3 \rangle$. Funkce jsou periodické, *f* a *h* s periodou 2π a funkce g s periodou $\frac{2}{3}\pi$.

c) Sestrojíme graf funkce $f: \quad y = \cos x$, $g: \quad y = \cos(x+\pi)$ a $h: \quad y = \cos x + \pi$.

```
Plot[{Cos[x], Cos[x + π], Cos[x] + π}, {x, -π, 2 π},
 PlotStyle → {{Hue[0.005], Thickness[0.008]},
   {Hue[0.63], Thickness[0.008]}, {Hue[0.1], Thickness[0.008]}}]
```



- Graphics -

Všechny tři funkce jsou periodické s periodou 2π.

Funkce *f* a *g* mají shodný obor hodnot, H(f) = H(g) $= \langle -1, 1 \rangle$. Protože je graf funkce *g* vzhledem ke grafu funkce *f* posunut o π ve směru záporné poloosy *x*, nabývá funkce $g: \quad y = \cos(x+\pi)$ svého maxima pro $x = (2k-1)\pi$ a minima pro $x = 2k\pi$.

Graf funkce $h: \quad y = \cos x + \pi$ je oproti grafu funkce *f* posunut o π ve směru kladné poloosy *y*, proto nabývá funkce maximálních hodnot $y_{max} = 1 + \pi$ pro $x = 2k\pi$ a minimálních hodnot $y_{min} = -1 + \pi$ pro $x = (2k-1)\pi$. Obor hodnot H(*h*) = $\langle -1+\pi, \ 1+\pi \rangle$.

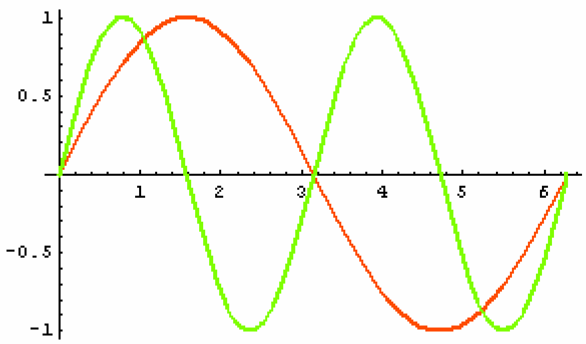
Příklad 18: Sestrojte graf funkce

f: $y = 2 \sin(2x - \pi/2) + 2$

Při konstrukci grafu funkce *f* postupujeme takto:

- Sestrojíme graf funkce $f_1: \quad y = \sin 2x$. Perioda funkce f_1 je poloviční vzhledem k periodě funkce $f_2: \quad y = \sin x$. Jinak řečeno, pro každé $x \in$ D(f_2) platí $f_1(x) = f_2(2x)$.

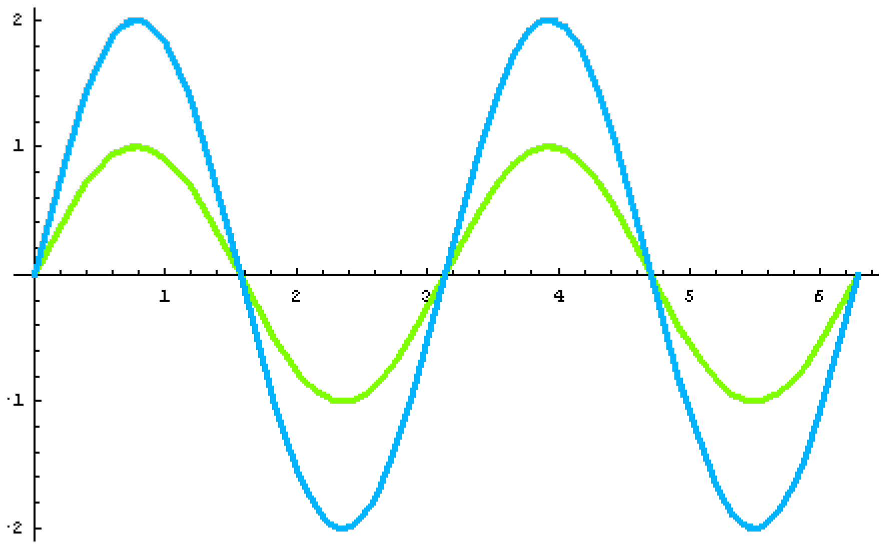
```
Plot[{Sin[x], Sin[2 x]}, {x, 0, 2 π},
 PlotStyle → {{Hue[0.05], Thickness[0.008]},
   {Thickness[0.008], Hue[0.25]}}]
```



- Graphics -

- Sestrojíme graf funkce $f_3 : y = 2\sin 2x$. Tato funkce má stejnou periodu a shodné průsečíky s osou x jako funkce f_1. Liší se oborem hodnot, $H(f_3) = \langle -2, 2 \rangle$.

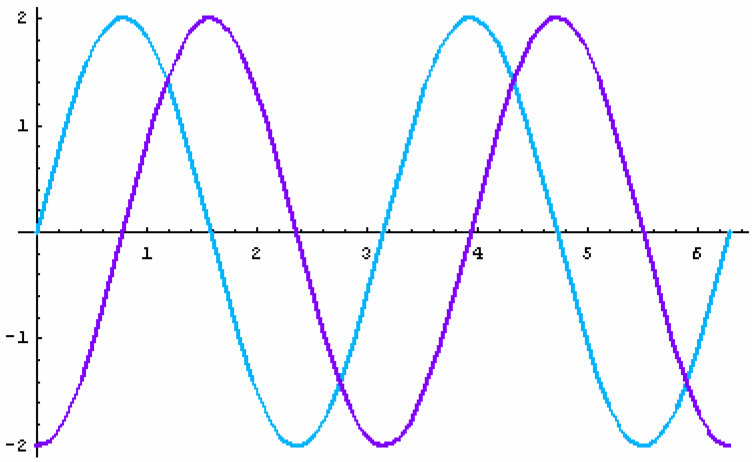
```
Plot[{Sin[2 x], 2 * Sin[2 x]}, {x, 0, 2 π},
 PlotStyle → {{Hue[0.25], Thickness[0.008]},
   {Hue[0.55], Thickness[0.008]}}]
```



- Graphics -

- Sestrojíme graf funkce $f_4 :\ y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$. Zadání funkce lze upravit do tvaru $f_4 :\ y = 2\sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]$. Tento graf je vzhledem ke grafu funkce $f_3 :\ y = 2\sin 2x$ posunut o $\frac{\pi}{4}$ ve směru kladné poloosy x.

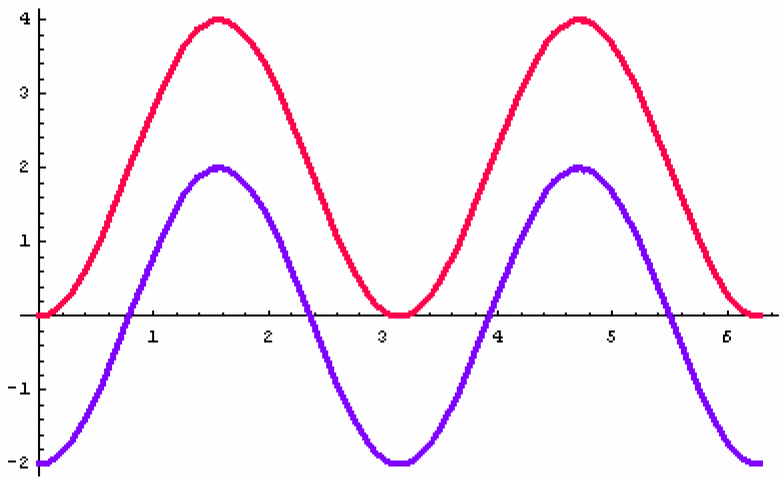
```
Plot[{2*Sin[2 x], 2*Sin[2*x - π/2]}, {x, 0, 2 π},
  PlotStyle → {{Hue[0.55], Thickness[0.008]},
    {Thickness[0.008], Hue[0.75]}}]
```




```
- Graphics -
```

- Sestrojíme graf funkce f, který je vzhledem ke grafu funkce f_4 posunut o 2 ve směru kladné poloosy y.

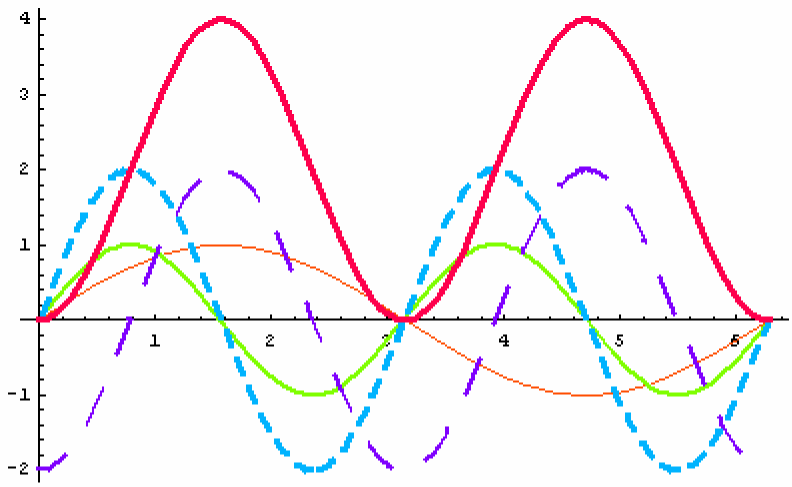
```
PlotStyle → {{Hue[0.75], Thickness[0.008]},
  {Thickness[0.008], Hue[0.95]}}]
```




```
Out[4]= - Graphics -
```

Celý postup je znázorněn na obrázku:

```
In[6]:= Plot[{Sin[x], Sin[2 x], 2 * Sin[2 x], 2 * Sin[2 x - π/2],
    2 * Sin[2 x - π/2] + 2}, {x, 0, 2 π},
   PlotStyle → {{Hue[0.05]}, {Hue[0.25], Thickness[0.007]},
     {Hue[0.55], Thickness[0.008], Dashing[{0.02}]},
     {Hue[0.75], Thickness[0.006], Dashing[{0.05}]},
     {Hue[0.95], Thickness[0.01]}}]
```




```
Out[6]= - Graphics -
```

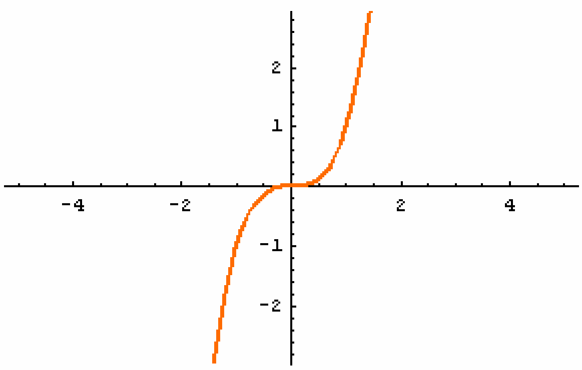
Mocninné funkce

Příklad 19: Sestrojte grafy funkcí

f: $y = x^3 - 2$, g: $y = (x - 2)^3$, h: $y = (x + 4)^3 - 3$

a) Nejprve sestrojíme graf funkce f': $y = x^3$.

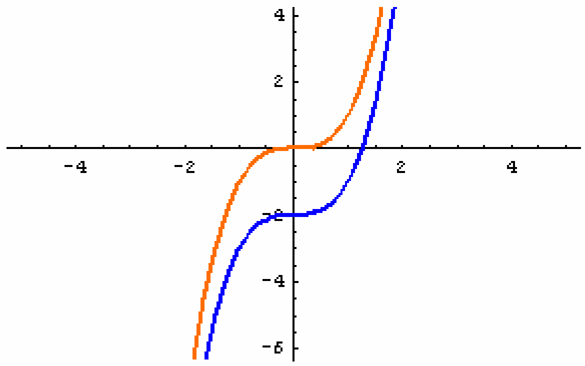
```
Plot[{x^3}, {x, -5, 5},
 PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0.07]}}]
```




```
- Graphics -
```

Graf hledané funkce f : $y = x^3 - 2$ je vzhledem ke grafu funkce f‘ posunut o 2 ve směru záporné poloosy y.

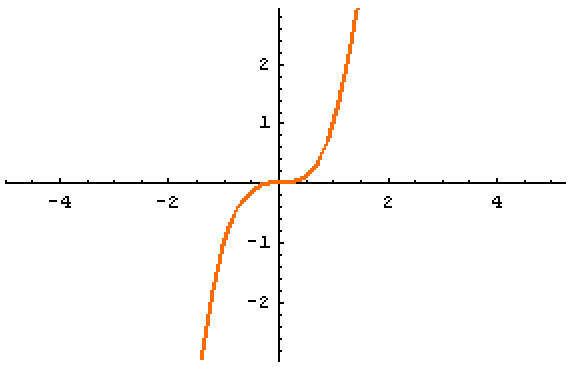
```
Plot[{x^3, x^3 - 2}, {x, -5, 5},
 PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0.07]},
   {Thickness[0.008], Hue[0.67]}}]
```



- Graphics -

b) Nejprve sestrojíme graf funkce f': $y = x^3$.

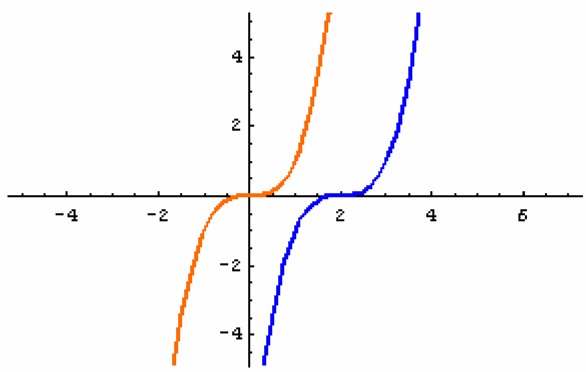
```
Plot[{x^3}, {x, -5, 5},
 PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0.07]}}]
```



- Graphics -

Graf hledané funkce g: $y = (x-2)^3$ je vzhledem ke grafu funkce *f‘* posunut o 2 ve směru kladné poloosy *x*.

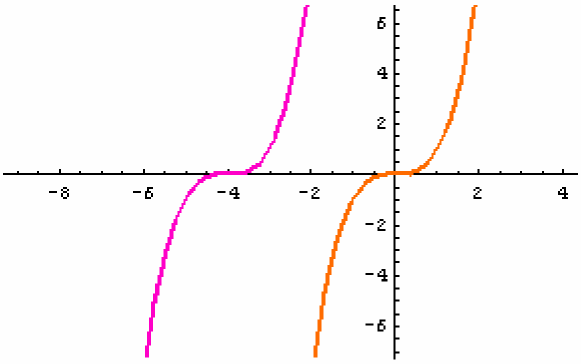
```
Plot[{x^3, (x - 2)^3}, {x, -5, 7},
 PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0.07]},
   {Thickness[0.008], Hue[0.67]}}]
```



- Graphics -

c) Nejprve sestrojíme graf funkce f': $y = x^3$ a funkce f'': $(x+4)^3$.

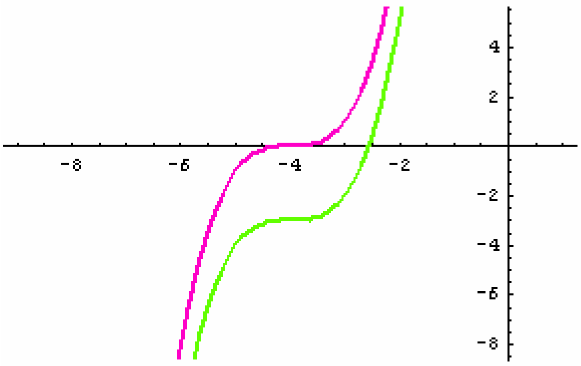
```
Plot[{ x^3, (x + 4)^3}, {x, -9, 4},
 PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0.07]},
   {Thickness[0.008], Hue[0.87]}}]
```



- Graphics -

Graf funkce *f*'' jsme získali posunutím grafu funkce *f*' o 4 ve směru záporné poloosy *x*. Graf hledané funkce h: $y = (x+4)^3 - 3$ je posunut vzhledem ke grafu funkce f'' o 3 ve směru záporné poloosy *y*.

```
Plot[{ (x + 4)^3, (x + 4)^3 - 3}, {x, -9, 1},
 PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0.87]},
   {Thickness[0.008], Hue[0.27]}}]
```



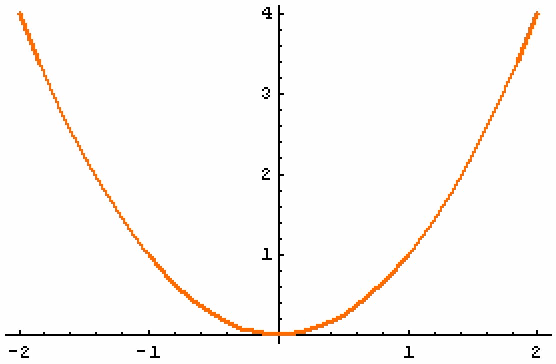
- Graphics -

Příklad 20: Sestrojte grafy funkcí

f: $y = x^2$ a g: $y = \sqrt{x}$. Grafy porovnejte a vyčtěte vlastnosti funkce g.

Sestrojíme graf kvadratické funkce $f: \quad y = x^2$.

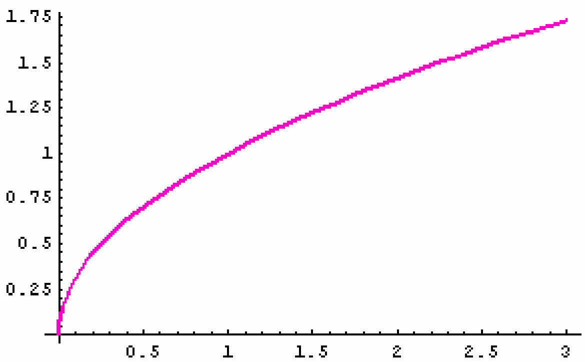
```
Plot[{x^2}, {x, -2, 2},
 PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0.07]}}]
```



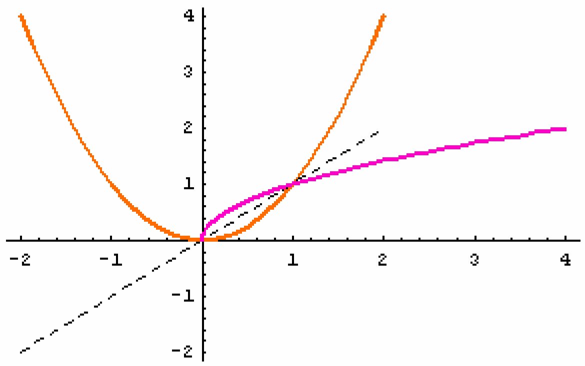
- Graphics -

A také graf mocninné funkce $g:\quad y = \sqrt{x}$.

```
Plot[{√x}, {x, 0, 3},
 PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0.87]}}]
```



- Graphics -



- Graphics -

Z obrázku je patrné, že funkce g je inverzní k té části funkce f, pro niž D(f) = $\langle 0, \infty)$. Jejich grafy jsou souměrně sdružené podle osy $y = x$.

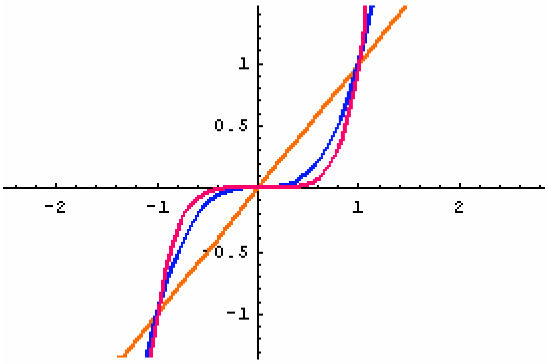
Funkce f je v intervalu $\langle 0, \infty)$ prostá a její obor hodnot H(f) = $\langle 0, \infty)$. Rovněž funkce g je v D(g) prostá, její definiční obor D(g) = H(f) = $\langle 0, \infty)$ a obor hodnot H(g) = $\langle 0, \infty)$. Funkce g je rostoucí a zdola omezená.

Příklad 21: Sestrojte grafy několika mocninných funkcí

a odvoďte pravidlo pro jejich vlastnosti.

Pro srovnání jsou uvedeny grafy funkcí $y = x^1$, $y = x^3$ a $y = x^5$.

```
Plot[{x, x^3, x^5}, {x, -2.7, 2.7},
 PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0.07]},
   {Thickness[0.008], Hue[0.65]},
   {Thickness[0.008], Hue[0.93]}}]
```

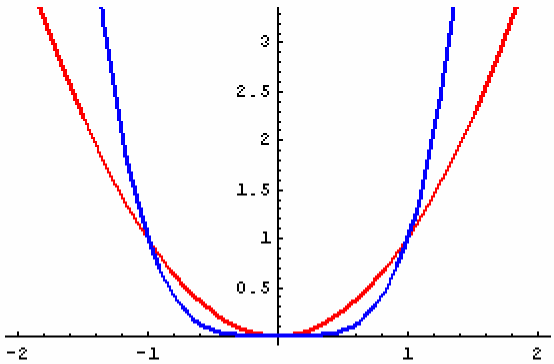



```
- Graphics -
```

Z obrázku je patrné, že pro každý přirozený lichý exponent n je mocninná funkce $y = x^n$ rostoucí, lichá, není shora ani zdola omezená a nemá minimum ani maximum. Jejím definičním oborem i oborem hodnot je množina reálných čísel.

Na druhém obrázku jsou znázorněny grafy funkcí $y = x^2$ a $y = x^4$.

```
Plot[{x^2, x^4}, {x, -2, 2},
 PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0]},
   {Thickness[0.008], Hue[0.67]}}]
```



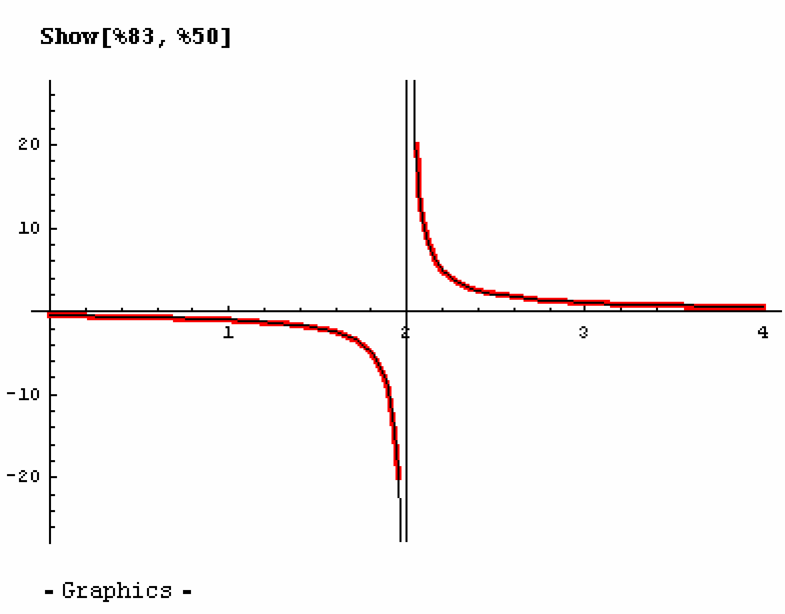

```
- Graphics -
```

Pro každý přirozený sudý exponent n je mocninná funkce $y = x^n$ klesající v intervalu $(-\infty, 0\rangle$ a rostoucí v intervalu $\langle 0, \infty)$. Funkce je sudá, omezená zdola, nemá maximum, minimum je [0, 0].

Lineární lomené funkce

Příklad 26: Sestrojte grafy lomených funkcí

a) $y = \dfrac{1}{x-2}$



D(f) = $\boldsymbol{R}$ – {2}, H(f) = $\boldsymbol{R}$ – {0}

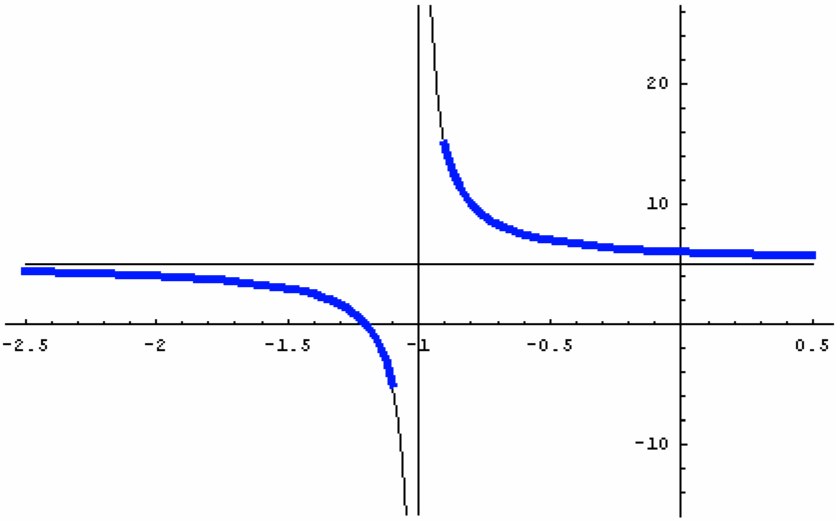
Grafem funkce $y = \dfrac{1}{x-2}$ je rovnoosá hyperbola, jejíž střed leží v bodu [2, 0] a asymptoty jsou přímky $x = 2$, $y = 0$.

b) $y = \dfrac{5x+6}{x+1}$

Zadání funkce lze vyjádřit ve tvaru $y = \dfrac{k}{x-m} + n$.

Řešíme takto: $y = \dfrac{5x+6}{x+1} = \dfrac{5(x+1)+1}{x+1} = \dfrac{5(x+1)}{x+1} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{x+1} + 5$. Odtud určíme střed hyperboly S[-1, 5], rovnice asymptot jsou $x = -1$, $y = 5$.

Show[%111, %115]



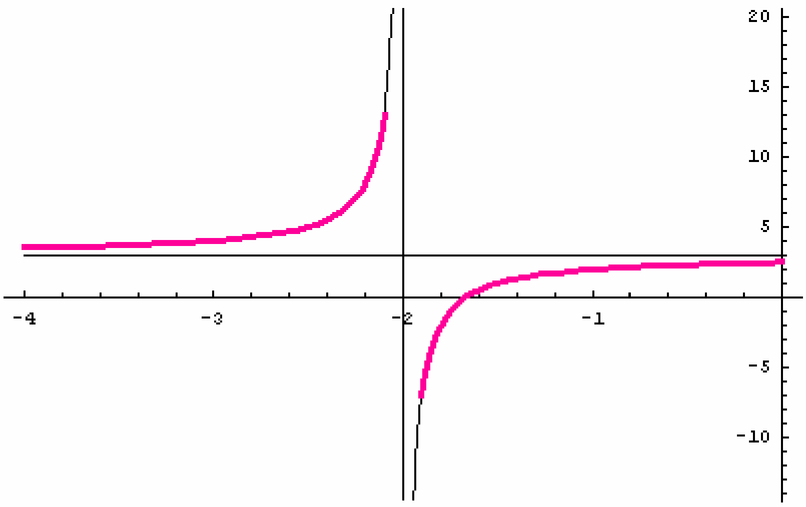
- Graphics -

D(f) = $\boldsymbol{R}$ – {-1}, H(f) = $\boldsymbol{R}$ – {5}

c) $y = \dfrac{3x+5}{x+2}$

Zadání funkce lze upravit do tvaru $y = 3 - \dfrac{1}{x+2}$. Střed hyperboly je bod S[-2, 3], asymptotami jsou přímky x = -2, y = 3. D(f) = $\boldsymbol{R}$ – {-2}, H(f) = $\boldsymbol{R}$ – {3}

Show[%150, %149]



- Graphics -

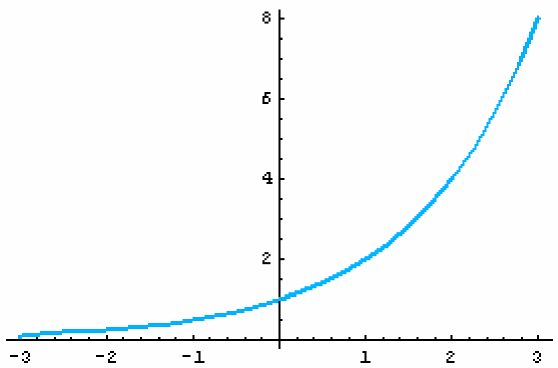
Exponenciální a logaritmické funkce

Příklad 22: Sestrojte grafy funkcí

a) $y = 2^x - 2$, b) $y = 2^{x-1}$, c) $y = 2^{x+1} + 2$

a) Nejprve sestrojíme graf exponenciální funkce f': $y = 2^x$.

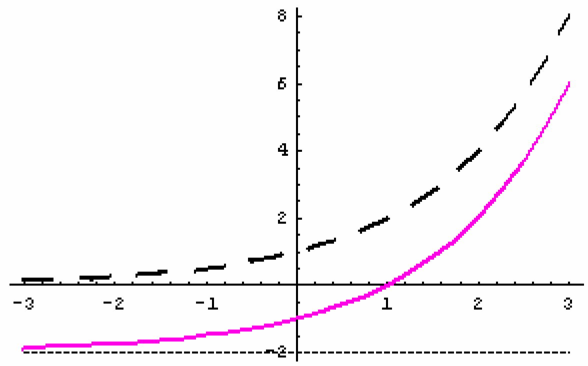
```
Plot[{2^x}, {x, -3, 3},
 PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0.55]}}]
```




```
- Graphics -
```

Graf hledané funkce f: $y = 2^x - 2$ získáme posunutím grafu funkce f' o 2 ve směru záporné poloosy y. Asymptotou je přímka o rovnici $y = -2$.

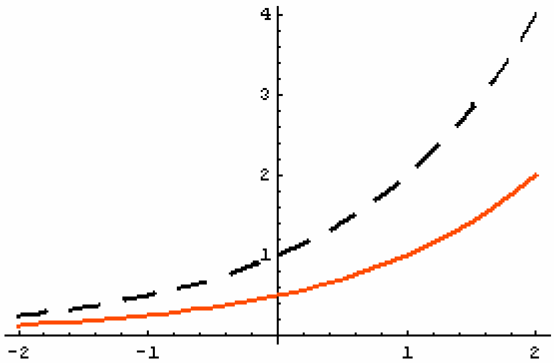
```
In[36]:= Plot[{2^x, 2^x - 2, -2}, {x, -3, 3},
          PlotStyle → {{Thickness[0.008], Dashing[{0.05}]},
            {Thickness[0.008], Hue[0.85]}, {Dashing[{0.007}]}}]
```




```
Out[36]= - Graphics -
```

b) Graf funkce g: $y = 2^{x-1}$ získáme posunutím grafu funkce f': $y = 2^x$ o 1 ve směru kladné poloosy x. Průsečík s osou y je bod $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

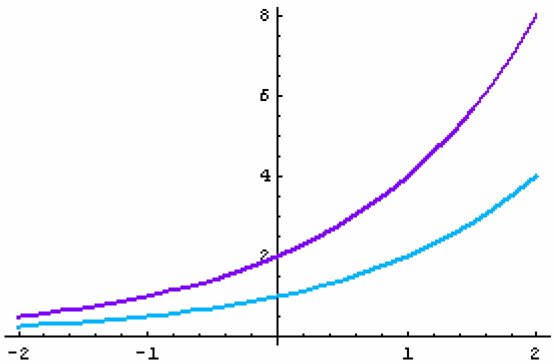
```
In[37]:= Plot[{2^x, 2^(x-1)}, {x, -2, 2},
    PlotStyle → {{Thickness[0.008], Dashing[{0.05}]},
      {Thickness[0.008], Hue[0.05]}}]
```




```
Out[37]= - Graphics -
```

c) Sestrojíme grafy funkcí f': $y = 2^x$ a h': $y = 2^{x+1}$.

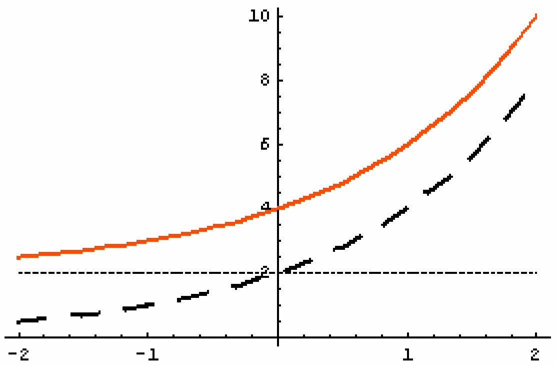
```
Plot[{2^x, 2^(x+1)}, {x, -2, 2},
  PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0.55]},
    {Thickness[0.008], Hue[0.75]}}]
```




```
- Graphics -
```

Graf hledané funkce h: $y = 2^{x+1} + 2$ je vzhledem ke grafu funkce h': $y = 2^{x+1}$ posunut o 2 ve směru kladné poloosy y. Asymptotou je přímka $y = 2$. Graf funkce h protíná osu y v [0, 4].

```
Plot[{2^(x+1), 2^(x+1) + 2, 2}, {x, -2, 2},
 PlotStyle → {{Thickness[0.008], Dashing[{0.05}]},
   {Thickness[0.008], Hue[0.05]}, {Dashing[{0.007}]}}]
```



```
- Graphics -
```

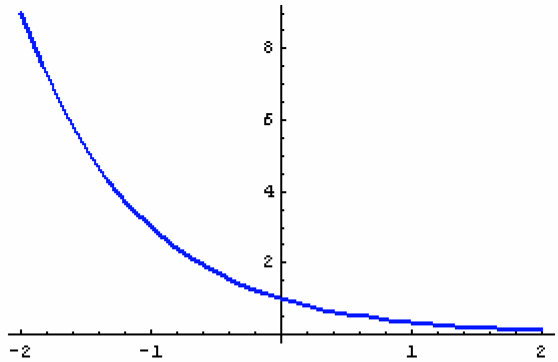
Příklad 23: Sestrojte grafy funkcí

a) $y = (1/3)^{|x|}$, b) $y = 4^{|x|}$ a c) $y = 3^{x} + 3^{-x}$

a) Určíme nulový bod: $x = 0$.

Je-li $x \geq 0$, pak lze exponenciální funkci vyjádřit ve tvaru $f_1: \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Její průběh je znázorněn grafem:

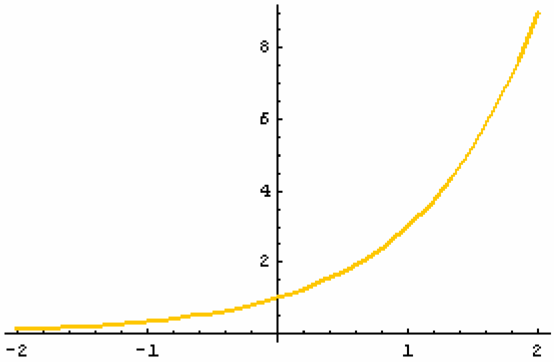
```
In[6]:= Plot[{(1/3)^x}, {x, -2, 2},
         PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0.65]}}]
```



```
Out[6]= - Graphics -
```

Je-li $x \leq 0$, pak lze exponenciální funkci vyjádřit ve tvaru $f_2: \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = 3^x$. Průběh funkce f_2 je znázorněn grafem:

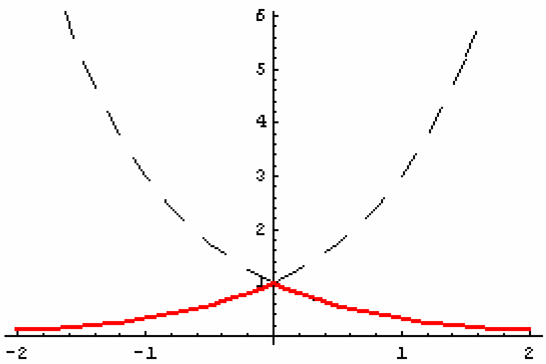
```
In[10]:= Plot[{(3)^x}, {x, -2, 2},
           PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0.13]}}]
```




```
Out[10]= - Graphics -
```

Pro hledanou funkci f : $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ platí $f = f_1 \cup f_2$.

```
In[12]:= Plot[{(1/3)^x, 3^x, (1/3)^Abs[x]}, {x, -2, 2},
           PlotStyle → {{Dashing[{0.05}]}, {Dashing[{0.05}]},
             {Thickness[0.008], Hue[0]}}]
```

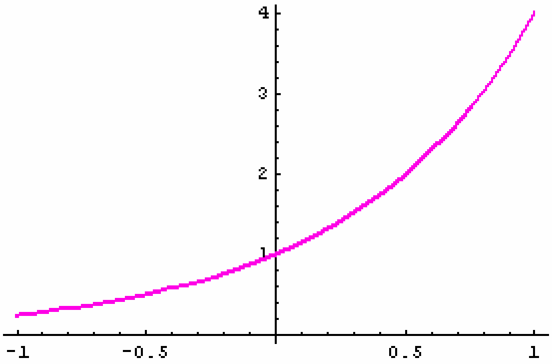



```
Out[12]= - Graphics -
```

Definičním oborem funkce f je množina reálných čísel, oborem hodnot je interval $\left(0, 1\right\rangle$.

b) Určíme nulový bod: $x = 0$.
Je-li $x \geq 0$, pak lze exponenciální funkci vyjádřit ve tvaru $g_1 : y = 4^x$. Průběh funkce je znázorněn grafem:

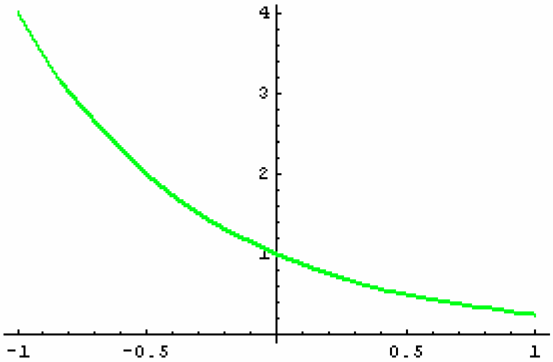
In[15]:= `Plot[{(4)^x}, {x, -1, 1}, PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0.85]}}]`



Out[15]= - Graphics -

Je-li $x \leq 0$, pak lze exponenciální funkci vyjádřit ve tvaru $g_2: \quad y = 4^{-x} = \left(\frac{1}{4}\right)^x$. Průběh funkce je znázorněn grafem:

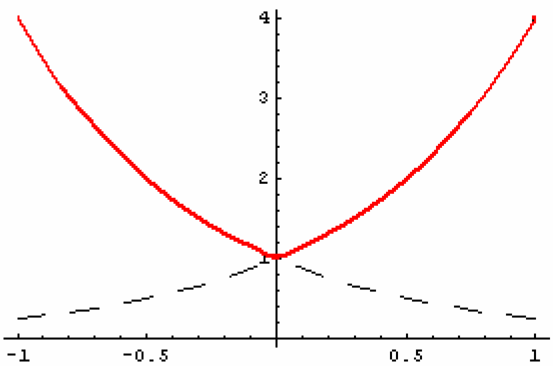
In[16]:= `Plot[{(1/4)^x}, {x, -1, 1}, PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0.35]}}]`



Out[16]= - Graphics -

Pro hledanou funkci $g: \quad y = 4^{|x|}$ platí: $g = g_1 \cup g_2$.

In[17]:= `Plot[{(1/4)^x, 4^x, 4^Abs[x]}, {x, -1, 1}, PlotStyle → {{Dashing[{0.05}]}, {Dashing[{0.05}]}, {Thickness[0.008], Hue[0]}}]`

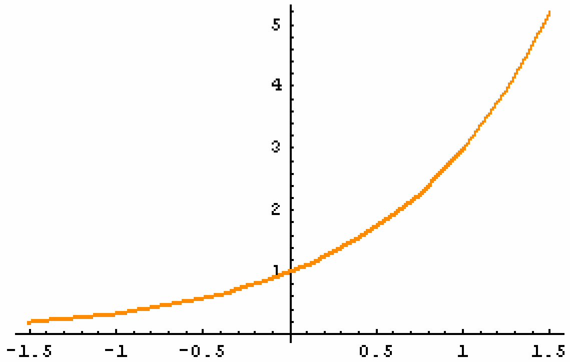


Out[17]= - Graphics -

Definičním oborem funkce g je množina reálných čísel, oborem hodnot je interval $\langle 1, \infty)$.

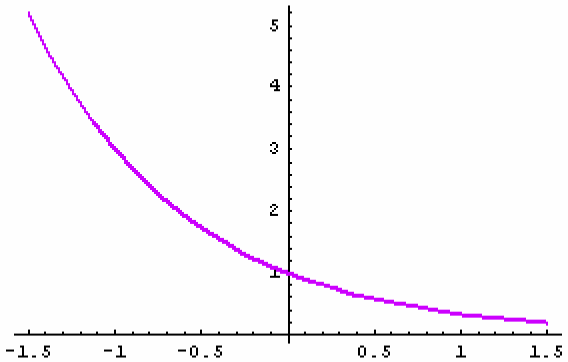
c) Sestrojíme grafy exponenciálních funkcí $h_1: \quad y = 3^x$ a $h_2: \quad y = 3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

```
In[29]:= Plot[{(3)^x}, {x, -1.5, 1.5},
           PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0.09]}}]
```




```
Out[29]= - Graphics -
```

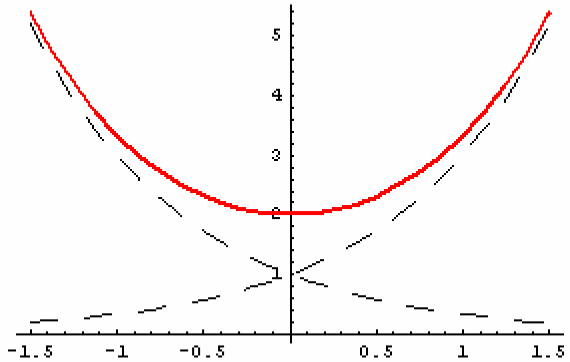
```
In[35]:= Plot[{(1/3)^x}, {x, -1.5, 1.5},
           PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0.8]}}]
```




```
Out[35]= - Graphics -
```

K sestrojení grafu funkce $h: \quad y = 3^x + 3^{-x}$ použijeme grafy funkcí h_1 a h_2, jejichž funkční hodnoty pro stejné x sečteme.

```
In[36]:= Plot[{(1/3)^x, 3^x, 3^x + 3^-x}, {x, -1.5, 1.5},
   PlotStyle → {{Dashing[{0.05}]}, {Dashing[{0.05}]},
     {Thickness[0.008], Hue[0]}}]
```



Out[36]= - Graphics -

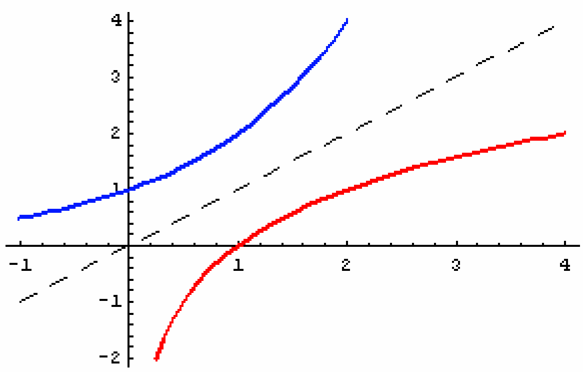
Funkce *h* je definovaná pro všechna reálná čísla, tj. D(*h*) = ***R***.
Nabývá hodnot $y \geq 2$, tj. H(*h*) = $\langle 2, \infty)$.

Příklad 24:Sestrojte grafy logaritmických funkcí

y = log2x a y = log1/2x a určete jejich vlastnosti.

a) Logaritmická funkce $y = \log_2 x$ je inverzní k exponenciální funkci $y = 2^x$. Jejich grafy jsou souměrné podle přímky *y* = *x*.

```
Show[%84, %85, %87]
```

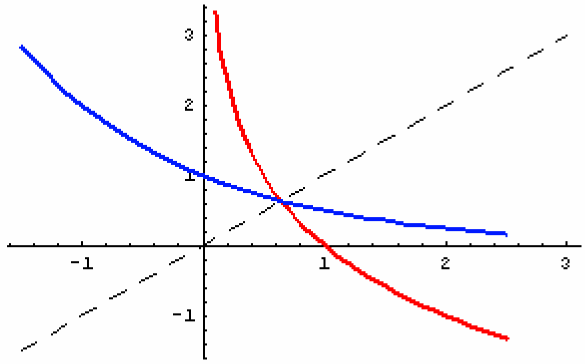


- Graphics -

Z grafu vyplývá, že logaritmická funkce $y = \log_2 x$ není ani sudá ani lichá. Je rostoucí. Nemá maximum ani minimum. Je definovaná pro všechna kladná čísla, tj. D(*f*) = $(0, \infty)$. Oborem hodnot jsou všechna reálná čísla. Graf prochází bodem [1, 0]. Osa *y* je asymptotou grafu.

b) Logaritmická funkce $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ je inverzní k exponenciální funkci $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Jejich grafy jsou souměrné podle přímky *y* = *x*.

```
Show[%112, %109, %111]
```



- Graphics -

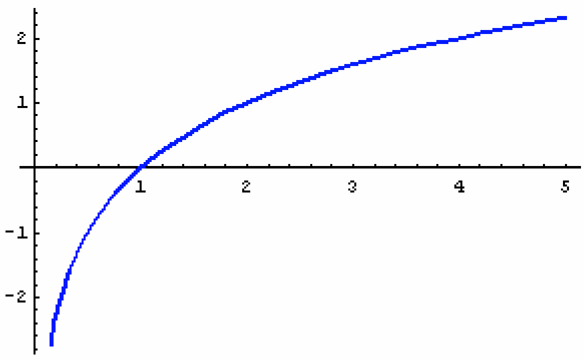
Z grafu vyplývá, že logaritmická funkce $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ není ani sudá ani lichá. Je klesající. Nemá maximum ani minimum. Je definovaná pro všechna kladná čísla, tj. D(*f*) = $(0, \infty)$. Oborem hodnot jsou všechna reálná čísla. Graf prochází bodem [1, 0]. Osa *y* je asymptotou grafu.

Příklad 25: Sestrojte grafy logaritmických funkcí:

a) *y* = - log2x, b) *y* = | log2x |, c) *y* = log2|x|, d) *y* = | log2|x| | - 1

a) Sestrojíme graf funkce $y = \log_2 x$.

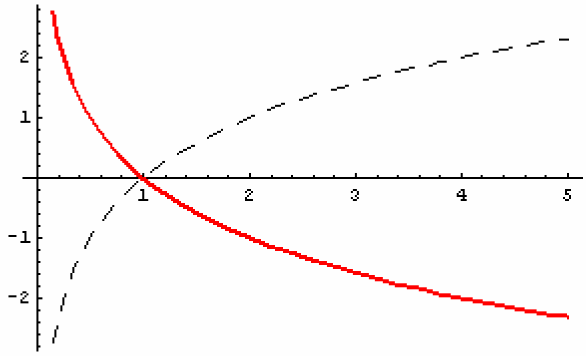
```
Plot[{Log[2, x]}, {x, 0.15, 5},
 PlotStyle → {{Thickness[0.008], Hue[0.65]}}]
```



- Graphics -

Graf hledané funkce $y = -\log_2 x$ je s grafem funkce $y = \log_2 x$ souměrně sdružený podle osy *x*.

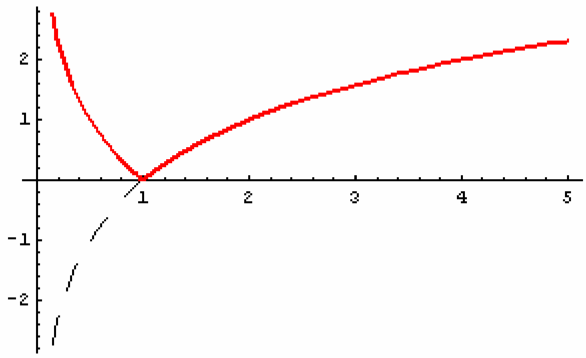
```
Plot[{Log[2, x], -Log[2, x]}, {x, 0.15, 5},
 PlotStyle → {{Thickness[0.007], Dashing[{0.03}]},
   {Thickness[0.008], Hue[0]}}]
```



- Graphics -

b) Graf funkce $y = \left|\log_2 x\right|$ získáme tak, že z grafu funkce $y = \log_2 x$ „překlopíme“ nad osu x tu část grafu, která je pod ní.

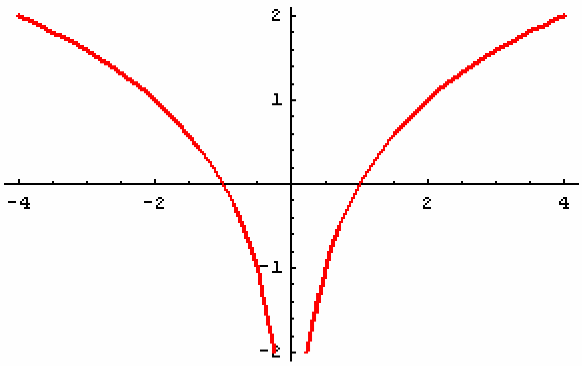
```
Plot[{Log[2, x], Abs[Log[2, x]]}, {x, 0.15, 5},
 PlotStyle → {{Dashing[{0.05}]},
   {Thickness[0.008], Hue[0]}}]
```



- Graphics -

c) Funkce $y = \log_2 \left|x\right|$ je sudá, proto část grafu pro záporná x získáme „překlopením“ grafu funkce $y = \log_2 x$ kolem osy y.

Show[%13, %14]

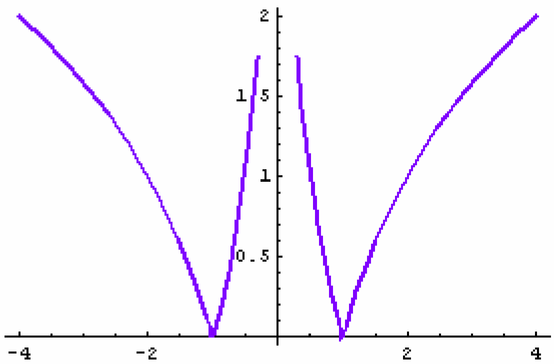


- Graphics -

Funkce je definovaná pro všechna nenulová reálná čísla, tj. D(*f*) = ***R*** – {0}.

d) Graf funkce $y = \left|\log_2 |x|\right|$ získáme z grafu funkce $y = \log_2 |x|$ tak, že „překlopíme" kolem osy *x* tu část grafu funkce, která je pod osou *x*.

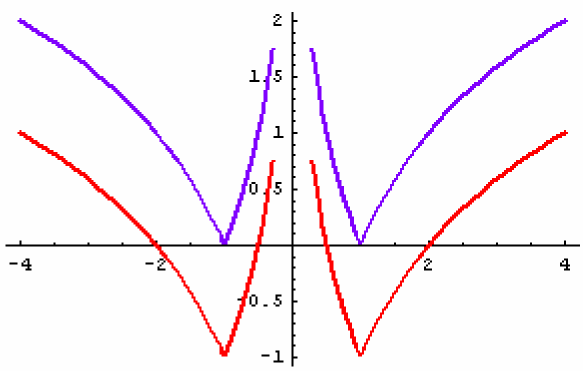
Show[%32, %33]



- Graphics -

Graf hledané funkce $y = \left|\log_2 |x|\right| - 1$ je oproti grafu funkce $y = \left|\log_2 |x|\right|$ posunut o 1 ve smyslu záporné poloosy *y*.

Show[%34, %38]



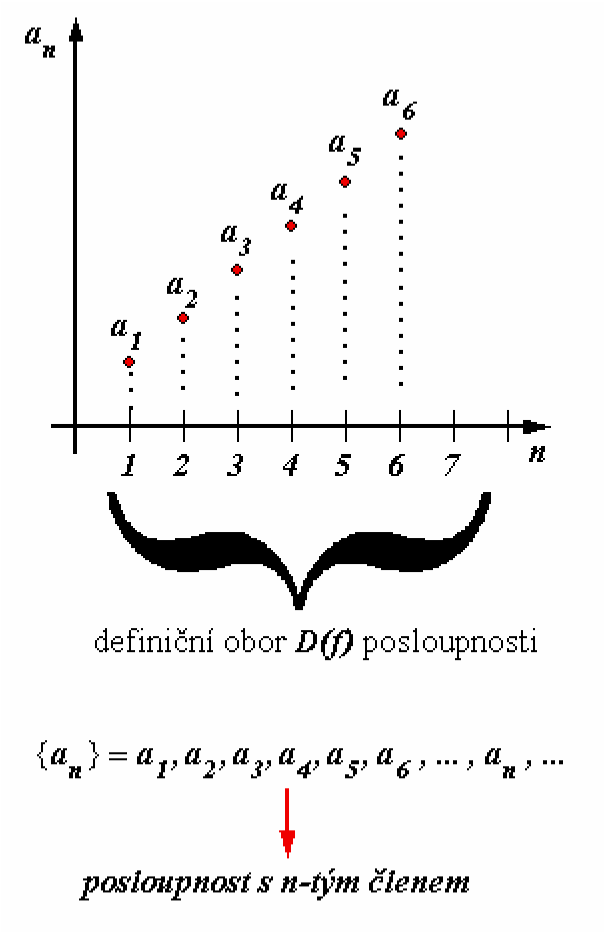
- Graphics -

2. KAPITOLA - Posloupnosti

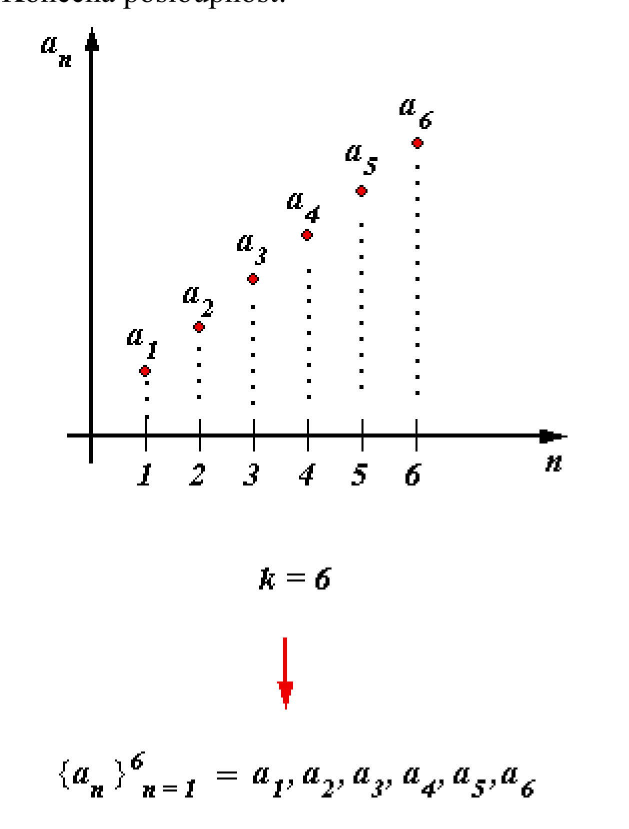
Jestliže ke každému přirozenému číslu **n** je podle určitého předpisu přiřazeno právě jedno reálné číslo a_n, pak čísla a_1, a_2, a_3,…a_n,… tvoří **posloupnost čísel**.

Značíme $\{a_n\}$ nebo $\left(a_n\right)_n^{\infty}$

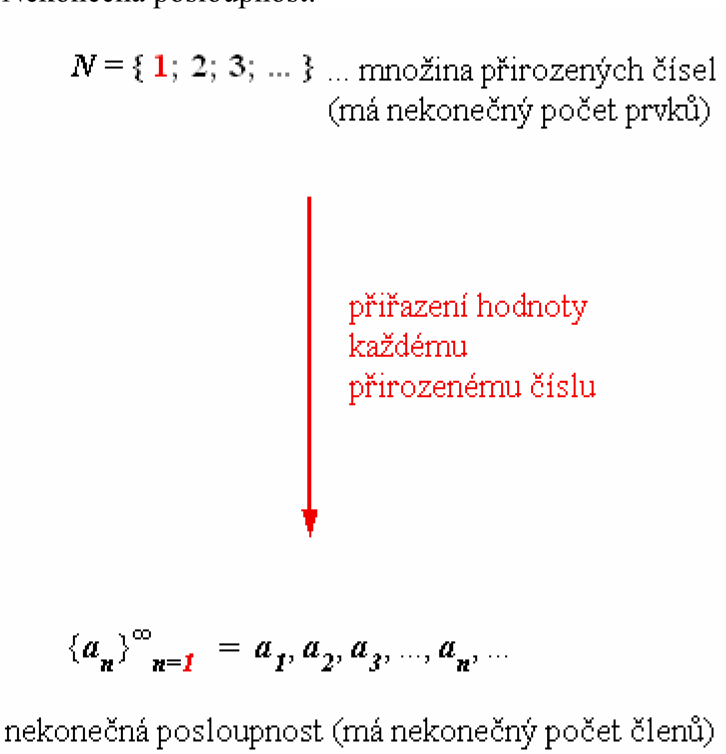
Při grafickém znázornění posloupnosti dané body nespojujeme spojnicí.



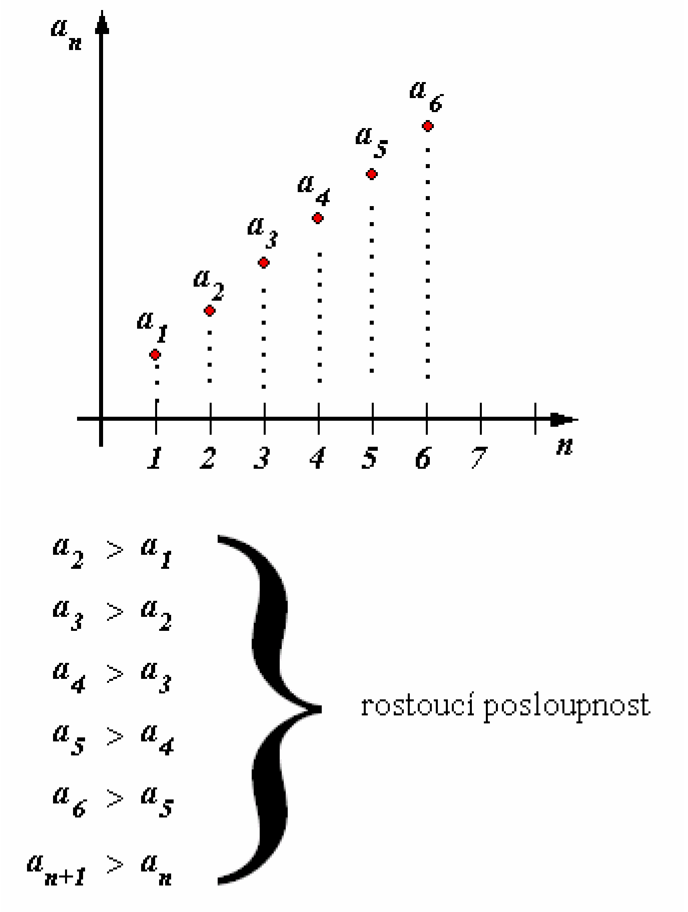
Konečná posloupnost:



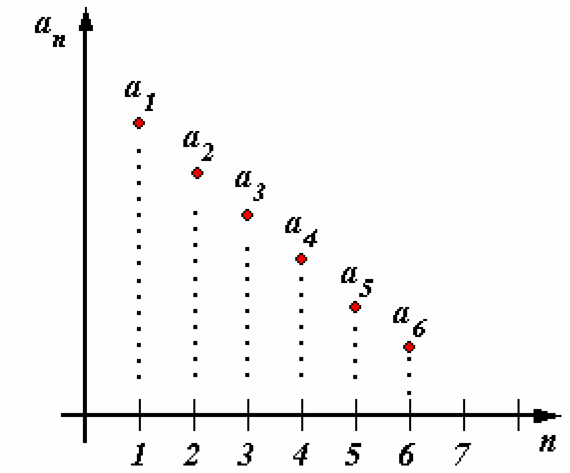
Nekonečná posloupnost:



Rostoucí posloupnost:

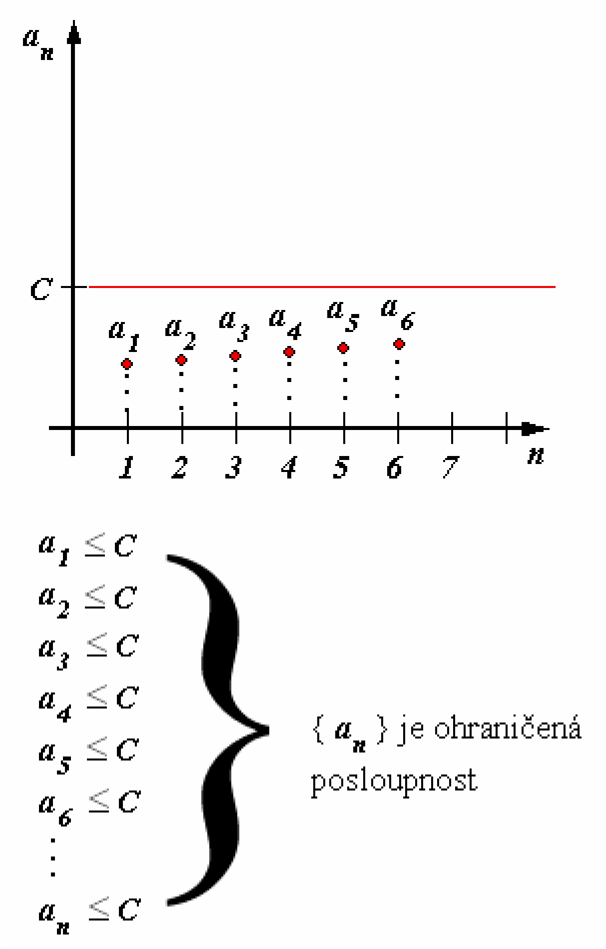


Klesající posloupnost:



$$\left.\begin{array}{l} a_2 < a_1 \\ a_3 < a_2 \\ a_4 < a_3 \\ a_5 < a_4 \\ a_6 < a_5 \\ a_{n+1} < a_n \end{array}\right\} \text{klesající posloupnost}$$

Ohraničená posloupnost:

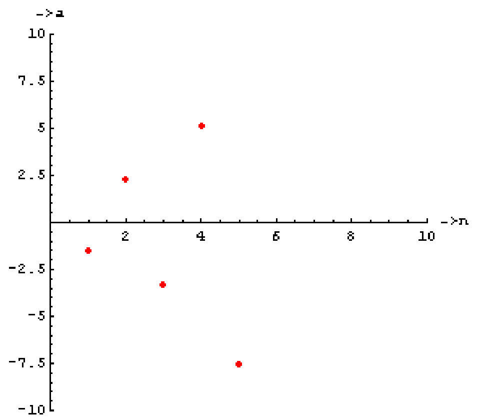


Příklad 40: Napište prvních pět členů posloupnost a znázorněte je graficky:

$\{(-3/2)^n\}$

Řešení:

```
In[33]:= data = List[{1, -3 / 2}, {2, 9 / 4}, {3, -27 / 8}, {4, 81 / 16}, {5, -243 / 32}];

ListPlot[data, PlotRange → {{0, 10}, {-10, 10}}, AspectRatio -> 1, PlotStyle -> {Hue[0], PointSize[0.02]}]
```



Příklad 41: Zjistěte, zda je posloupnost {$\left\{\frac{1}{n(n+1)}\right\}_{n}^{\infty}$ rostoucí,popř.klesající.

Řešení:

Vypočítáme několik první členů dané posloupnosti:

$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{6}$, $a_3 = \frac{1}{12}$, $a_4 = \frac{1}{20}$, $a_5 = \frac{1}{30}$

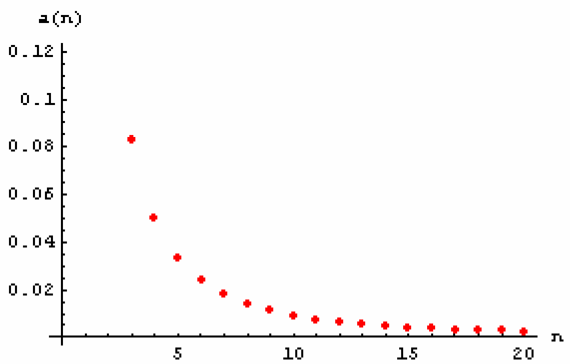
In[6]:=
```
g[n_] := 1/ (n (n + 1))
```

In[8]:=
```
TableForm[Table[{n, N[g[n]]}, {n, 1, 20}]]
```

Out[8]//TableForm=

1	0.5
2	0.166667
3	0.0833333
4	0.05
5	0.0333333
6	0.0238095
7	0.0178571
8	0.0138889
9	0.0111111
10	0.00909091
11	0.00757576
12	0.00641026
13	0.00549451
14	0.0047619
15	0.00416667
16	0.00367647
17	0.00326797
18	0.00292398
19	0.00263158
20	0.00238095

In[11]:=
```
ListPlot[Table[g[n], {n, 1, 20}],
  PlotStyle → {Hue[0], PointSize[0.02]},
  AxesLabel → {"n", "a(n)"}]
```



Out[11]= - Graphics -

Na základě výpočtu těchto členů a z grafického názoru vyslovíme hypotézu, že daná posloupnost je klesající. Ověříme ještě početně, tj. musíme dokázat, že pokaždé $n \in N$ platí $a_{n+1} < a_n$. Úpravami, které jsou pro každé $n \in N$ ekvivalentní, postupně dostaneme:

$$a_{n+1} < a_n$$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} < \frac{1}{n(n+1)}$$

$$n(n+1) < (n+1)(n+2)$$

$$n < n+2$$

Protože poslední nerovnost je pro každé $n \in N$ splněna, platí pro každé $n \in N$ také $a_{n+1} < a_n$

Daná posloupnost je klesající.

Aritmetická posloupnost

Posloupnost $(a_n)_n^\infty$, ve které je rozdíl $a_{n+1} - a_n$ každých dvou sousedních členů konstantní, se nazývá aritmetická posloupnost. Číslo $d = a_{n+1} - a_n$, $n \in N$, se nazývá diference aritmetické posloupnosti.

$$\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots$$

aritmetická posloupnost

Platí pro ni:

a) vztah pro n-tý člen

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

b) rekurentní vztah pro n+1 člen

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

$$d = a_{n+1} - a_n \quad \ldots \textit{diference}$$

Příklad 42: Určete desátý člen aritmetické posloupnosti, pro kterou platí

$a_2 + a_3 = 9$ a $a_2 . a_3 = 14$. Znázorněte graficky.

Řešení:

Členy a_2, a_3 vyjádříme pomocí prvního členu a_1 a diference d dané posloupnosti:

$a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$

Dosadíme –li odtud do daných podmínek, dostaneme soustavu dvou rovnic se dvěma neznámými a_1,d:

$2a_1 + 3d = 9$ (1)

$(a_1 + d)(a_1 + 2d) = 14$ (2)

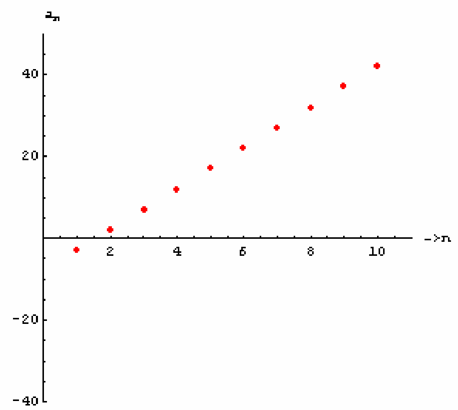
Z rovnice (1) vyjádříme $a_1 = ½(9-3d)$ a dosadíme do rovnice (2). Získanou rovnici vyřešíme:

$[1/2(9 – 3d) + d] . [1/2\}(9 – 3d)] + 2d] = 14$
$(9 – d)(9 + d) = 56$
$d^2 = 25$
$d = 5$ nebo $d = -5$

Pro d = 5 vypočteme: $a_1 = ½ (9 – 3.5) = - 3$
$a_{10} = a_1 + 9d = -3 + 9.5 = 42$

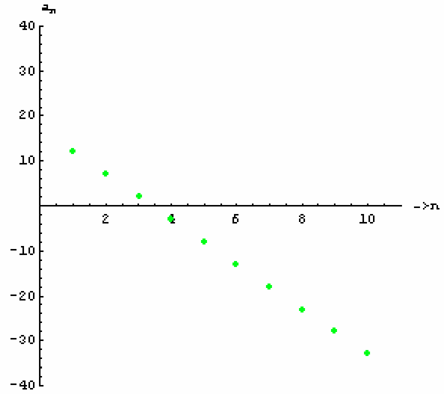
Pro d = -5 vypočteme: $a_1 = ½ [9 – 3.(-5)] = 12$
$a_{10} = a_1 + 9d = 12 + 9.(-5) = -33$

```
In[1]:= Solve[{a1 + d + a1 + 2 d == 9, (a1 + d) * (a1 + 2 d) == 14}, {a1, d}]

Out[1]= {{a1 → -3, d → 5}, {a1 → 12, d → -5}}

In[56]:= data = List[{1, -3}, {2, 2}, {3, 7}, {4, 12}, {5, 17}, {6, 22}, {7, 27}, {8, 32}, {9, 37}, {10, 42}]

Out[56]= {{1, -3}, {2, 2}, {3, 7}, {4, 12}, {5, 17}, {6, 22}, {7, 27}, {8, 32}, {9, 37}, {10, 42}}

In[59]:= ListPlot[data, PlotRange → {{0, 11}, {-40, 50}}, AspectRatio -> 1, PlotStyle -> {Hue[0], PointSize[0.02]},
  AxesLabel -> {"->n", "->an"}];
```



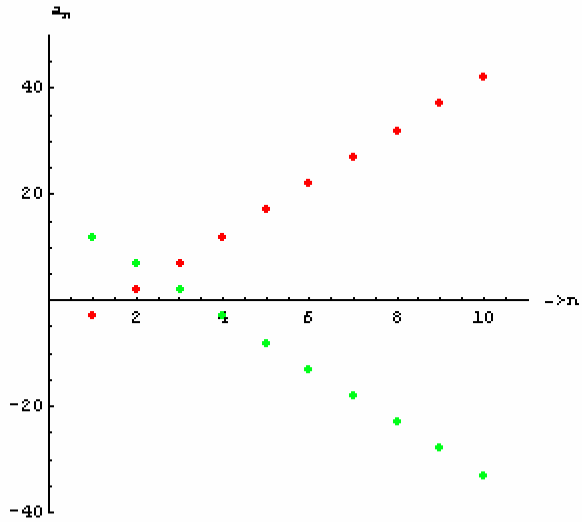
Graf první posloupnosti

```
In[61]:= data = List[{1, 12}, {2, 7}, {3, 2}, {4, -3}, {5, -8}, {6, -13}, {7, -18}, {8, -23}, {9, -28}, {10, -33}]

Out[61]= {{1, 12}, {2, 7}, {3, 2}, {4, -3}, {5, -8}, {6, -13}, {7, -18}, {8, -23}, {9, -28}, {10, -33}}

In[62]:= ListPlot[data, PlotRange → {{0, 11}, {-40, 40}}, AspectRatio -> 1, PlotStyle -> {Hue[0.35], PointSize[0.02]},
           AxesLabel -> {"->n", "->aₙ"}];
```



Graf druhé posloupnosti

```
In[63]:= Show[%59, %62]
```




```
Out[63]= - Graphics -
```

Existují dvě aritmetické posloupnosti daných vlastností.
První z nich ($a_1 = -3$, $d = 5$) má desátý člen $a_{10} = 42$. (Posloupnost je rostoucí).
Druhá z nich($a_1 = 12$, $d = -5$) má desátý člen $a_{10} = -33$. (Posloupnost je klesající).
Grafy obou posloupností jsou na obrázku.

Geometrická posloupnost

Posloupnost $(a_n)_n^\infty$, ve které je podíl $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ každých dvou sousedních členů konstantní, se nazývá geometrická posloupnost.Číslo q = $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, $n \in N$, se nazývá kvocient geometrické posloupnosti.

$$\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots$$

$$\downarrow$$

geometrická posloupnost

Platí pro ni:

a) vztah pro n-tý člen

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

b) rekurentní vztah pro n+1 člen

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

$$\downarrow$$

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \ldots \textit{kvocient}$$

Příklad 43: Součet prvních členů geometrické posloupnosti

je $s_4 = 80$. Vypočtěte první člen a_1 a kvocient q této posloupnosti, jestliže $a_4 = 9a_2$.

Řešení:

Ze zadání vyplývá, že $q \neq 1$.

Proto:

$a_2 = a_1 q$, $\quad a_4 = \quad a_1 \dfrac{q^4 - 1}{q - 1}$, dosadíme-li odtud do daných podmínek, dostaneme soustavu dvou rovnic se dvěma neznámými a_1, q: $\quad a_1 q^3 = 9 a_1 q \qquad (1)$

$$a_1 \frac{q^4 - 1}{q - 1} = 80 \qquad (2)$$

Z rovnice (1) vypočteme:

$$a_1 q(q^2 - 9) = 0$$

$$a_1 = 0 \vee q = 0 \vee q = -3 \vee q = 3$$

Každou z těchto možností dosadíme do rovnice (2).

1. Pro $a_1 = 0$ neexistuje žádné $q \in R$ splňující rovnici
2. $q = 0$: $\quad a_1 \,.\, \dfrac{0 - 1}{0 - 1} = 80 \qquad \Rightarrow a_1 = 80$
3. $q = -3$: $\quad a_1 \,.\, \dfrac{81 - 1}{-3 - 1} = 80 \qquad \Rightarrow a_1 = -4$

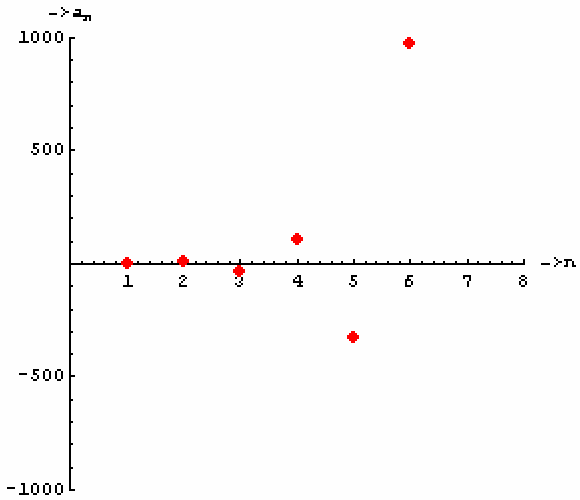
4 $q = 3$: $\quad a_1 \,.\, \dfrac{81 - 1}{3 - 1} . = 80 \qquad \Rightarrow a_1 = 2$

```
In[68]:= Solve[{a1*q^3 == 9*a1*q, (a1*q^4 - a1) / (q - 1) == 80},
          {a1, q}]

Out[68]= {{a1 → -4, q → -3}, {a1 → 2, q → 3}, {a1 → 80, q → 0}}
```

Existují tři geometrické posloupnosti daných vlastností:
$a_1 = -4$, $q = -3 \qquad \Rightarrow \qquad -4, 12, -36, 108, -324, 972\ldots$

Posloupnost znázorníme graficky:

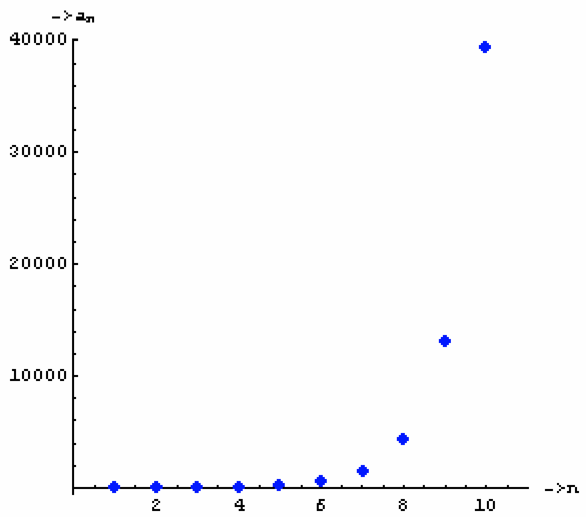
```
In[114]:= data = List[{1, -4}, {2, 12}, {3, -36}, {4, 108},
            {5, -324}, {6, 972}]

Out[114]= {{1, -4}, {2, 12}, {3, -36},
           {4, 108}, {5, -324}, {6, 972}}

In[115]:= ListPlot[data, PlotRange → {{0, 8}, {-1000, 1000}},
            AspectRatio -> 1,
            PlotStyle -> {Hue[0], PointSize[0.03]},
            AxesLabel -> {"->n", "->aₙ"}];
```



$a_1 = 2$, $q = 3$ $\Rightarrow$ 2,6,18,54,162,486,1458,4374,13122,39366…

Posloupnost znázorníme graficky:

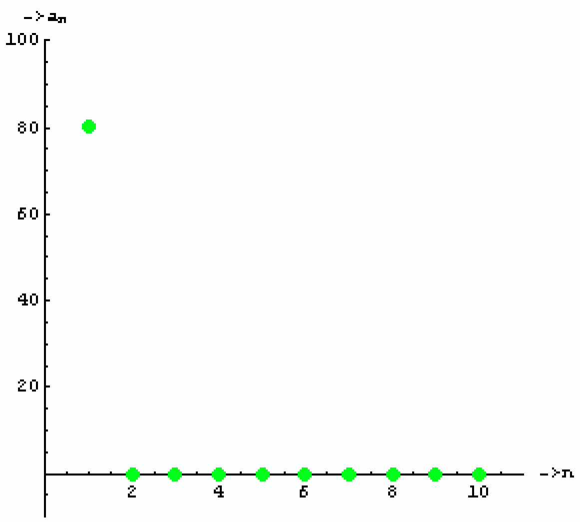
```
Out[100]= 39366

In[112]:= data = List[{1, 2}, {2, 6}, {3, 18}, {4, 54}, {5, 162},
            {6, 486}, {7, 1458}, {8, 4374}, {9, 13122}, {10, 39366}]

Out[112]= {{1, 2}, {2, 6}, {3, 18}, {4, 54}, {5, 162}, {6, 486},
           {7, 1458}, {8, 4374}, {9, 13122}, {10, 39366}}

In[113]:= ListPlot[data, PlotRange → {{0, 11}, {-500, 40000}},
            AspectRatio -> 1,
            PlotStyle -> {Hue[0.65], PointSize[0.03]},
            AxesLabel -> {"->n", "->aₙ"}];
```



$a_1 = 80$, $q = 0$ $\quad\Rightarrow\quad$ 80, 0,0,0,…

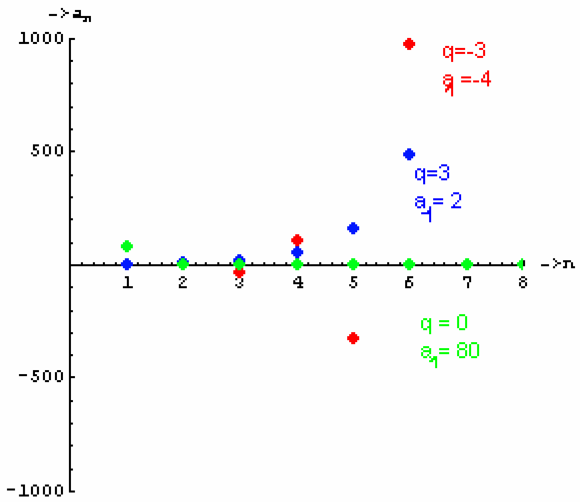
Posloupnost znázorníme graficky:

```
In[116]:= data = List[{1, 80}, {2, 0}, {3, 0}, {4, 0}, {5, 0},
            {6, 0}, {7, 0}, {8, 0}, {9, 0}, {10, 0}]

Out[116]= {{1, 80}, {2, 0}, {3, 0}, {4, 0}, {5, 0},
           {6, 0}, {7, 0}, {8, 0}, {9, 0}, {10, 0}}

In[117]:= ListPlot[data, PlotRange → {{0, 11}, {-10, 100}},
            AspectRatio -> 1,
            PlotStyle -> {Hue[0.35], PointSize[0.03]},
            AxesLabel -> {"->n", "->a_n"}];
```



Pro zajímavost zakreslíme všechny tři posloupnosti do jedné osy a_n a jedné osy n:

In[118]:= **Show[%115, %113, %117]**



Out[118]= - Graphics -

3. KAPITOLA - Analytická geometrie kvadratických útvarů

Kružnice

Kružnice a její rovnice

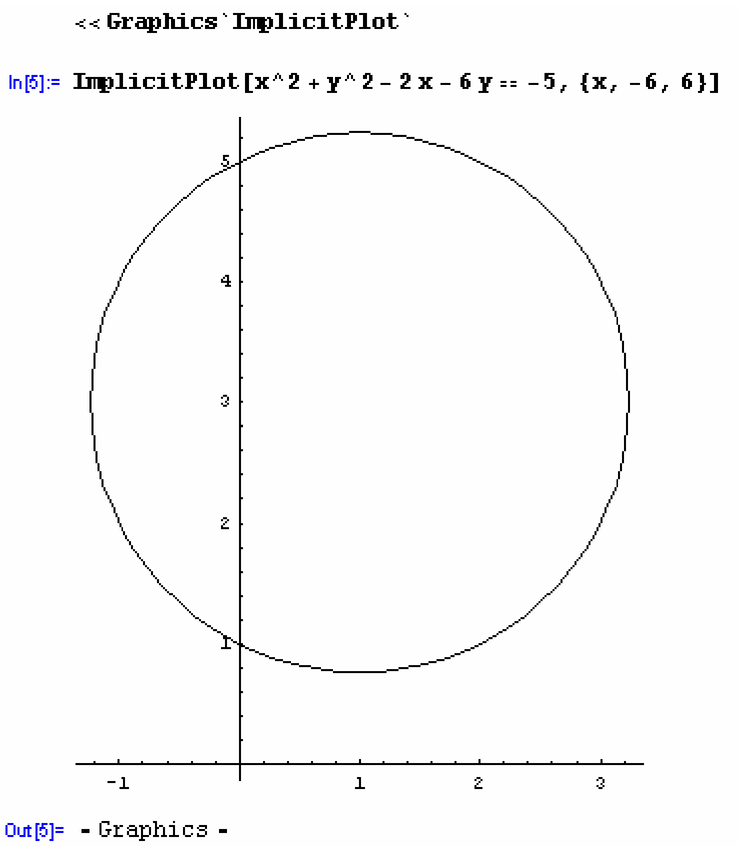
Převedeme-li obecnou rovnici kružnice na středový tvar, získáme souřadnice středu kružnice a její poloměr. Výsledek ověříme graficky.

Příklad 27: Najděte souřadnice středu a poloměr kružnice.

Kružnici zobrazte.

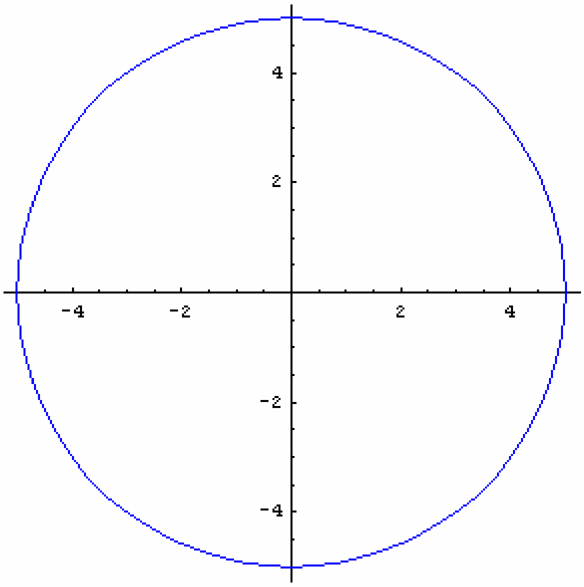
a) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$

středový tvar rovnice $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$, střed $S[1,3]$, poloměr $r = 2$.



b) $x^2 + y^2 = 25$, střed $S[0,0]$,poloměr $r = 5$

```
In[26]:= ImplicitPlot[x^2 + y^2 == 25, {x, -6, 6},
  PlotStyle → RGBColor[0, 0, 1]]
```

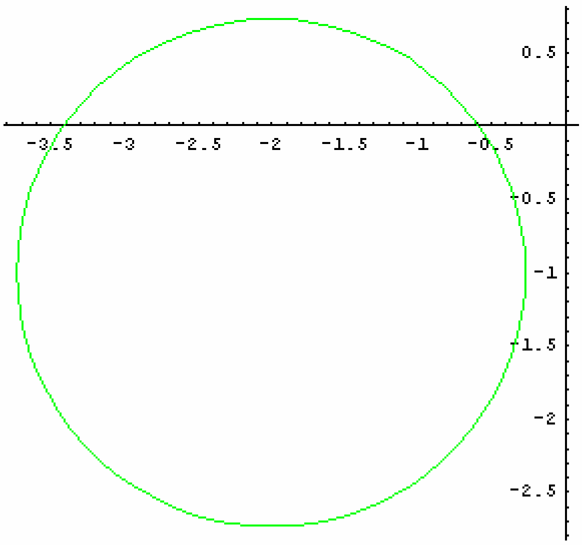


```
Out[26]= - Graphics -
```

c) $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 2 = 0$

středový tvar rovnice $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 3$, střed $S[-2,-1]$,poloměr $r = \sqrt{3}$

```
In[22]:= ImplicitPlot[x^2 + y^2 + 4 x + 2 y + 2 == 0, {x, -6, 6},
  PlotStyle → RGBColor[0, 1, 0]]
```

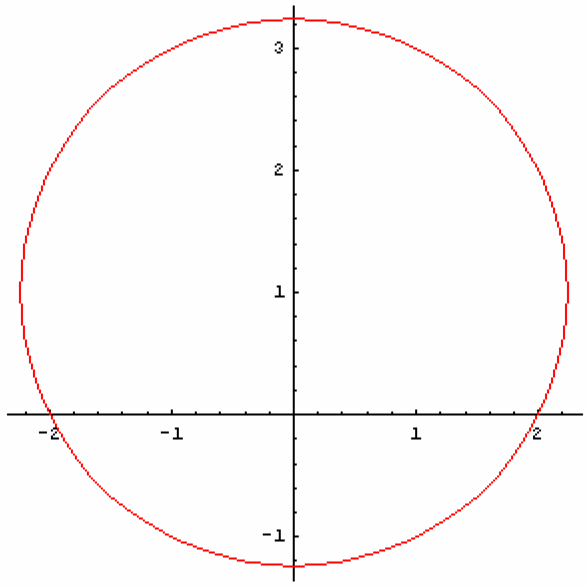


```
Out[22]= - Graphics -
```

d) $x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$

středový tvar rovnice $x^2 + (y-1)^2 = 5$, střed $S[0,1]$, poloměr $r = \sqrt{5}$

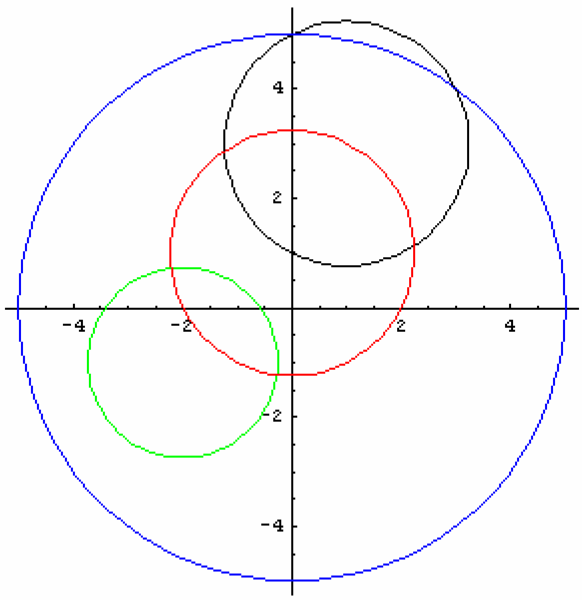
```
In[23]:= ImplicitPlot[x^2 + y^2 - 2 y - 4 == 0, {x, -6, 6},
          PlotStyle → RGBColor[1, 0, 0]]
```




```
Out[23]= - Graphics -
```

Grafické porovnání všech příkladů.

```
In[27]:= Show[%5, %26, %22, %23]
```




```
Out[27]= - Graphics -
```

Vzájemná poloha přímky a kružnice

Vzájemnou polohu přímky a kružnice zjišťujeme řešením soustavy kvadratické rovnice(kružnice) a lineární rovnice (přímky).
Má-li soustava dvě různá řešení,existují dva různé společné body přímky a kružnice - přímka je sečnou kružnice.
Má-li soustava jedno řešení, existuje jeden společný bod přímky a kružnice – přímka je tečnou kružnice.
Nemá-li soustava v oboru reálných čísel řešení, nemají přímka a kružnice společný bod – přímka je vnější přímkou kružnice.

Příklad 28: Určete vzájemnou polohu přímky a kružnice.

V případě, že mají společné body, určete jejich souřadnice.

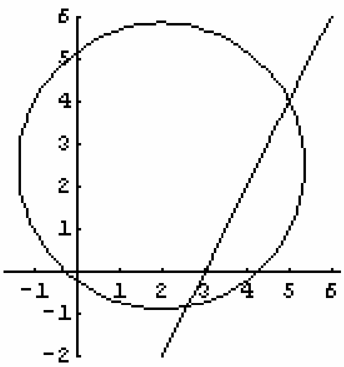
a) $p: 2x - y - 6 = 0, \quad k: x^2 + y^2 - 4x - 5y - 1 = 0$

Spočítáme souřadnice průsečíků přímky a kružnice.

```
In[36]:= Solve[{2 x - y - 6 == 0, x^2 + y^2 - 4 x - 5 y - 1 == 0}, {x, y}] //
          N

Out[36]= {{x → 2.6, y → -0.8}, {x → 5., y → 4.}}
```

Řešení soustavy rovnic má dvě různá řešení, přímka je sečnou kružnice. Výsledek ověříme graficky.

```
In[35]:= ImplicitPlot[{2 x - y - 6 == 0, x^2 + y^2 - 4 x - 5 y - 1 == 0},
           {x, -1.5, 6}, AspectRatio → Automatic, PlotRange → {-2, 6}]
```




```
Out[35]= - Graphics -
```

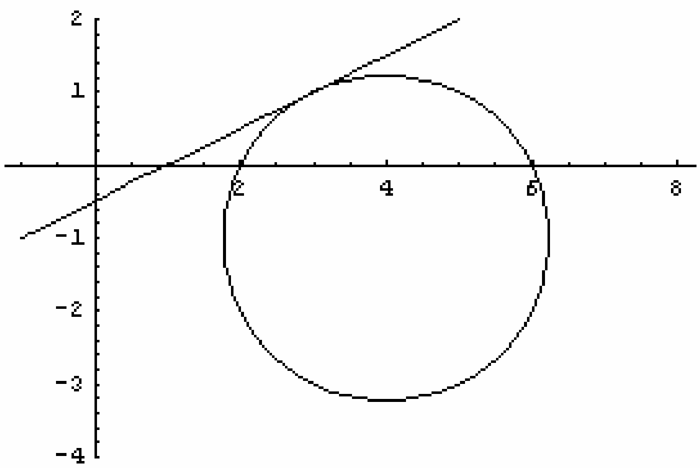
b) $p: x - 2y - 1 = 0, \quad k: (x-4)^2 + (y+1)^2 = 5$

Spočítáme souřadnice průsečíků přímky a kružnice

```
In[38]:= Solve[{x - 2 y - 1 == 0, (x - 4)^2 + (y + 1)^2 == 5}, {x, y}]

Out[38]= {{x → 3, y → 1}, {x → 3, y → 1}}
```

Řešení soustavy má jedno řešení, přímka je tečnou kružnice. Výsledek ověříme graficky.

```
In[43]:= ImplicitPlot[{x - 2 y - 1 == 0, (x - 4)^2 + (y + 1)^2 == 5},
           {x, -1, 8}, AspectRatio → Automatic, PlotRange → {-4, 2}]
```




```
Out[43]= - Graphics -
```

c) $\quad p: x+y-8=0, \quad k: (x-4)^2+(y+1)^2=5$

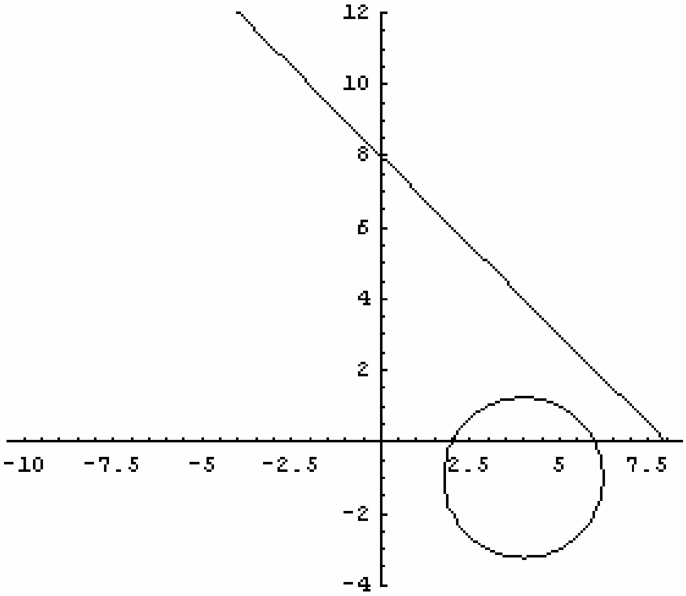
Spočítáme souřadnice průsečíků přímky a kružnice

```
In[49]:= Solve[{x + y - 8 == 0, (x - 4)^2 + (y + 1)^2 == 5}, {x, y}]
```

Out[49]= $\left\{\left\{x \to \frac{1}{2}\left(13 - i\sqrt{15}\right),\ y \to \frac{1}{2}\left(3 + i\sqrt{15}\right)\right\},\ \left\{x \to \frac{1}{2}\left(13 + i\sqrt{15}\right),\ y \to \frac{1}{2}\left(3 - i\sqrt{15}\right)\right\}\right\}$

Soustava nemá řešení v oboru reálných čísel. Přímka nemá s kružnicí společný bod, je vnější přímkou kružnice. Výsledek ověříme graficky.

```
In[52]:= ImplicitPlot[{x + y - 8 == 0, (x - 4)^2 + (y + 1)^2 - 5 == 0},
           {x, -10, 8}, AspectRatio → Automatic, PlotRange → {-4, 12}]
```



Out[52]= - Graphics -

Elipsa

Elipsa a její rovnice

Z osové rovnice elipsy určíme souřadnice středu elipsy,velikost hlavní a vedlejší poloosy.

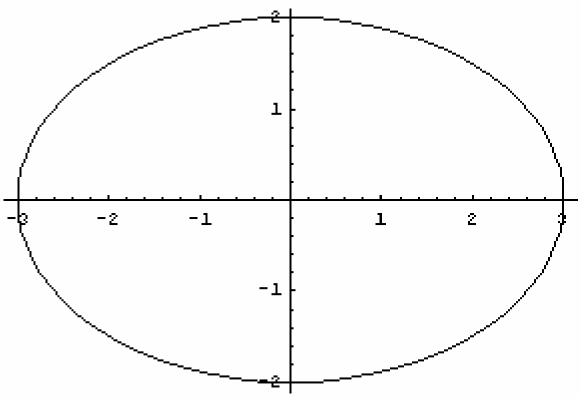
Příklad 29: Najděte souřadnice středu elipsy a délky poloos.

a) $4x^2 + 9y^2 = 36$

osová rovnice elipsy $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

střed $S[0,0]$, hlavní poloosa $a = 3$, vedlejší poloosa $b = 2$.

```
Graphics`ImplicitPlot`

In[1]:= ImplicitPlot[4 x^2 + 9 y^2 == 36, {x, -6, 6}]
```



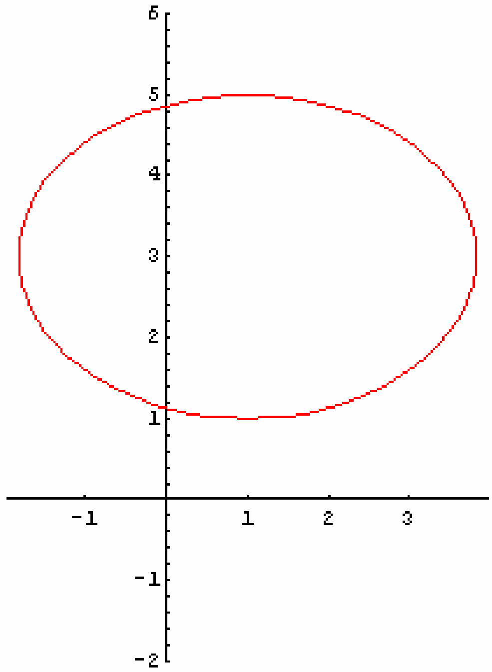

```
Out[1]= - Graphics -
```

b) $x^2 + 2y^2 - 2x - 12y + 11 = 0$

osová rovnice elipsy $\dfrac{(x-1)^2}{8} + \dfrac{(y-3)^2}{4} = 1$

střed $S[1,3]$, hlavní poloosa $a = 2\sqrt{2}$, vedlejší poloosa $b = 2$.

```
In[4]:= ImplicitPlot[x^2 + 2 y^2 - 2 x - 12 y + 11 == 0, {x, -6, 6},
        PlotStyle → RGBColor[1, 0, 0], PlotRange → {-2, 6}]
```



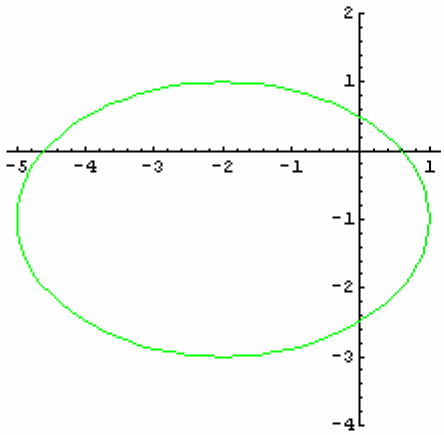

```
Out[4]= - Graphics -
```

c) $4x^2 + 9y^2 + 16x + 18y - 11 = 0$

osová rovnice elipsy $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$

střed $S[-2,-1]$, hlavní poloosa $a = 3$, vedlejší poloosa $b = 2$.

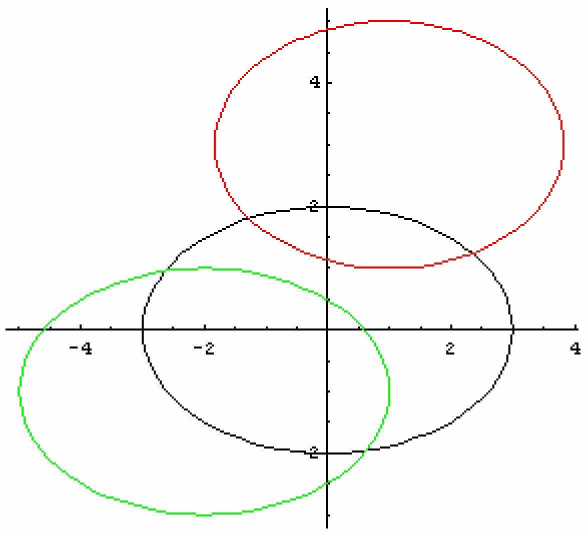
```
In[7]:= ImplicitPlot[4 x^2 + 9 y^2 + 16 x + 18 y - 11 == 0, {x, -6, 6},
          PlotStyle → RGBColor[0, 1, 0], PlotRange → {-4, 2}]
```




```
Out[7]= - Graphics -
```

Grafické porovnání všech příkladů

```
In[14]:=
        Show[%1, %4, %7]
```



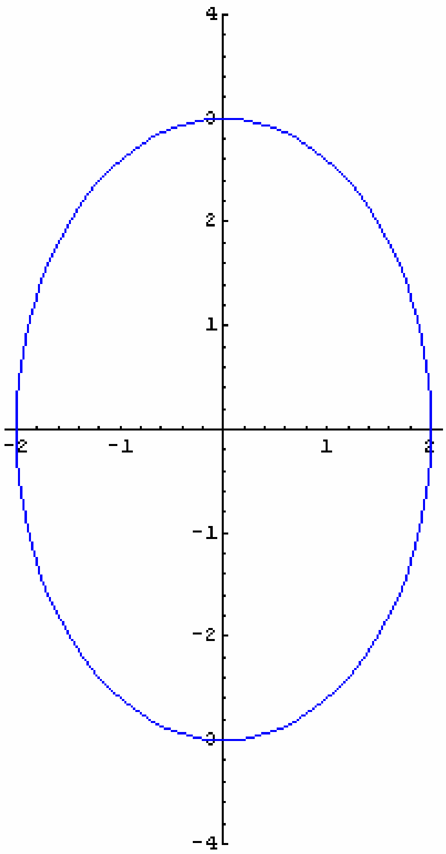

```
Out[14]= - Graphics -
```

d) $9x^2 + 4y^2 = 36$

osová rovnice elipsy $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

střed $S[0,0]$, hlavní poloosa $a = 2$, vedlejší poloosa $b = 3$.

```
In[11]:= ImplicitPlot[9 x^2 + 4 y^2 == 36, {x, -6, 6},
          PlotStyle → RGBColor[0, 0, 1], PlotRange → {-4, 4}]
```




```
Out[11]= - Graphics -
```

Vzájemná poloha přímky a elipsy

Vyšetření vzájemné polohy přímky a elipsy provádíme stejně jako v případě vzájemné polohy přímky a kružnice.

Příklad 30: Vyšetřete vzájemnou polohu přímky a elipsy.

V případě, že mají společné body, určete jejich souřadnice.

a) $p: 3x - 4z - 3 = 0, \quad e: 3x^2 + 5y^2 = 120$

Spočítáme souřadnice průsečíků.

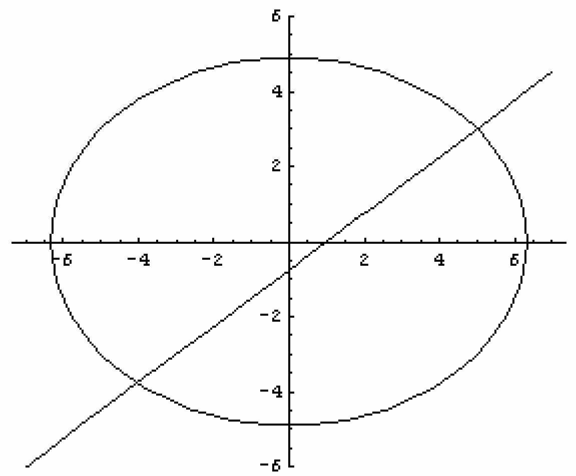
```
In[15]:= Solve[{3 x - 4 y - 3 == 0, 3 x^2 + 5 y^2 == 120}, {x, y}]
```

Out[15]= $\left\{\left\{x \to -\frac{125}{31}, y \to -\frac{117}{31}\right\}, \{x \to 5, y \to 3\}\right\}$

```
In[16]:= Solve[{3 x - 4 y - 3 == 0, 3 x^2 + 5 y^2 == 120}, {x, y}] //
         N

Out[16]= {{x → -4.03226, y → -3.77419}, {x → 5., y → 3.}}
```

Soustava rovnic má dvě různá řešení, přímka má s elipsou dva různé průsečíky, přímka je sečnou elipsy. Ověříme graficky.

```
In[20]:= ImplicitPlot[{3 x - 4 y - 3 == 0, 3 x^2 + 5 y^2 == 120},
           {x, -7, 7}, AspectRatio → Automatic, PlotRange → {-6, 6}]
```




```
Out[20]= - Graphics -
```

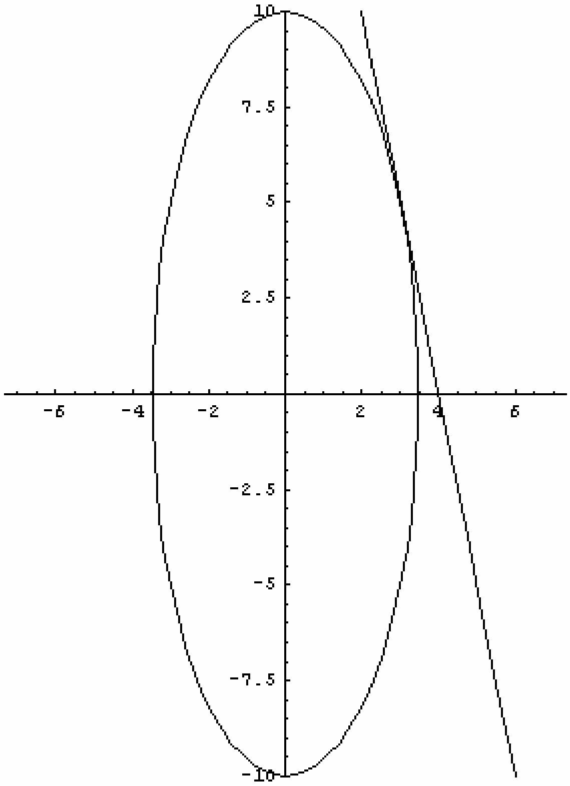
b) $p: 5x + y - 20 = 0, \quad e: 25x^2 + 3y^2 = 300$

Spočítáme souřadnice průsečíků

```
In[21]:= Solve[{5 x + y - 20 == 0, 25 x^2 + 3 y^2 == 300}, {x, y}]

Out[21]= {{x → 3, y → 5}, {x → 3, y → 5}}
```

Soustava rovnic má jediné řešení, přímka a elipsa mají společný jediný bod, přímka je tečnou elipsy.

```
In[23]:= ImplicitPlot[{5 x + y - 20 == 0, 25 x^2 + 3 y^2 == 300},
          {x, -7, 7}, AspectRatio → Automatic, PlotRange → {-10, 10}]
```




```
Out[23]= - Graphics -
```

c) $p: x+2y-15=0, \quad e: 3x^2+2y^2=84$

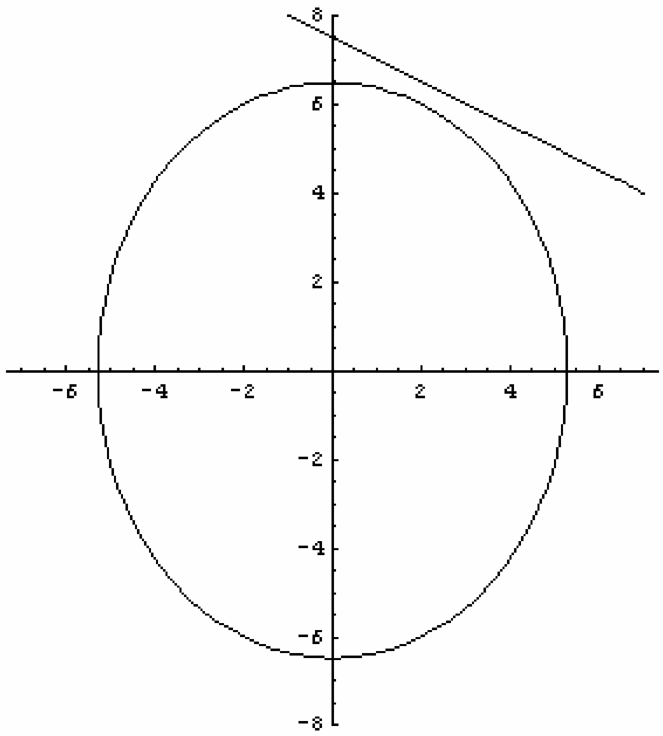
Spočítáme souřadnice průsečíků

```
In[24]:= Solve[{x + 2 y - 15 == 0, 3 x^2 + 2 y^2 == 84}, {x, y}]
```

$$\text{Out[24]=} \left\{\left\{x \to \frac{1}{7}\left(15 - i\sqrt{174}\right),\ y \to \frac{1}{14}\left(90 + i\sqrt{174}\right)\right\},\ \left\{x \to \frac{1}{7}\left(15 + i\sqrt{174}\right),\ y \to \frac{1}{14}\left(90 - i\sqrt{174}\right)\right\}\right\}$$

Soustava rovnic nemá reálné řešení, přímka nemá s elipsou společný bod, přímka je vnější přímkou elipsy.

```
n[29]:= ImplicitPlot[{x + 2 y - 15 == 0, 3 x^2 + 2 y^2 == 84},
  {x, -7, 7}, AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> {-8, 8}]
```




```
Out[29]= - Graphics -
```

Hyperbola

Hyperbola a její rovnice

Souřadnice středu hyperboly a velikost hlavní a vedlejší poloosy určíme z osové rovnice hyperboly.

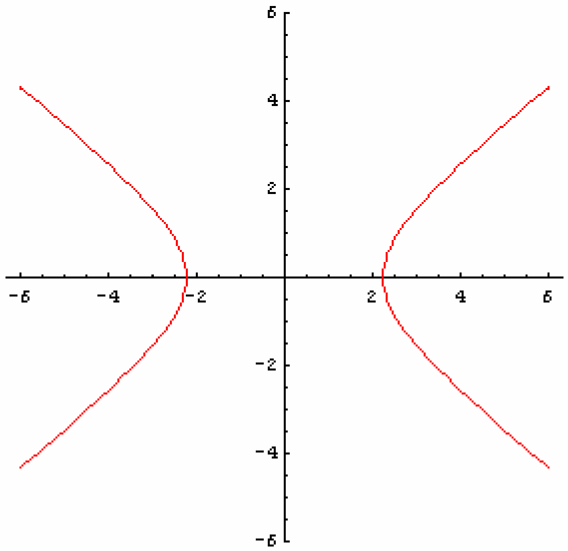
Příklad 31:Zjistěte délky poloos a souřadnice středu hyperboly

a) $3x^2 - 5y^2 = 15$

osová rovnice hyperboly $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{3} = 1$

střed $S[0,0]$, hlavní poloosa $a = \sqrt{5}$, vedlejší poloosa $b = \sqrt{3}$.

```
ImplicitPlot[3 x^2 - 5 y^2 == 15, {x, -6, 6},
 PlotStyle → RGBColor[1, 0, 0], PlotRange → {-6, 6}]
```



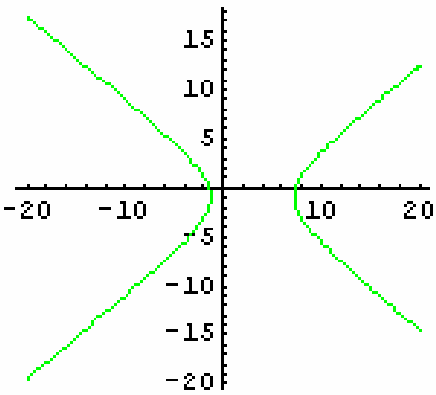
- Graphics -

b) $2x^2 - 3y^2 - 12x - 6y - 21 = 0$

osová rovnice hyperboly $\frac{(x-3)^2}{3} - \frac{(y+1)^2}{2} = 1$

střed $S[3,-1]$, hlavní poloosa $a = \sqrt{3}$, vedlejší poloosa $b = \sqrt{2}$.

```
ImplicitPlot[2 x^2 - 3 y^2 - 12 x - 6 y - 21 == 0, {x, -20, 20},
 PlotStyle → RGBColor[0, 1, 0]]
```



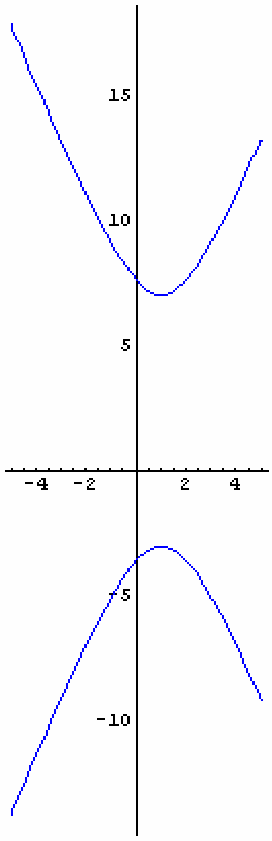
- Graphics -

c) $-25x^2+4y^2+50x-16y-109=0$

osová rovnice hyperboly $-\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{25}=1$

střed $S[1,2]$, hlavní poloosa $a=5$, vedlejší poloosa $b=2$.

```
ImplicitPlot[-25 x^2 + 4 y^2 + 50 x - 16 y - 109 == 0,
 {x, -5, 5}, PlotStyle → RGBColor[0, 0, 1]]
```



- Graphics -

Vzájemná poloha přímky a hyperboly

Vyšetření vzájemné polohy přímky a hyperboly provádíme opět řešením soustavy rovnic přímky a hyperboly.
Přímka je sečnou hyperboly, mají-li společné dva různé body nebo jeden společný bod a přímka je rovnoběžná různá s asymptotami hyperboly.
Přímka je tečnou hyperboly, má-li s hyperbolou společný jediný bod.
Přímka je vnější přímkou hyperboly, nemá-li s hyperbolou žádný společný bod.

Příklad 32: Určete vzájemnou polohu přímky a hyperboly.

V případě, že mají společné body, určete jejich souřadnice.

a) $h: 9x^2 - 16y^2 = 144, \quad p: 3x - 4y - 12 = 0$

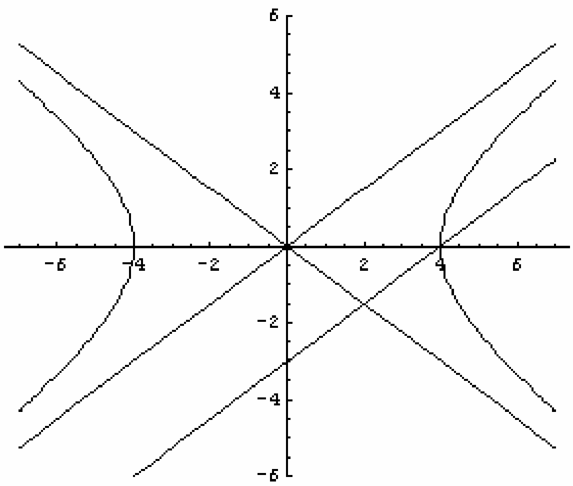
rovnice asymptot $y = \pm\frac{3}{4}x$

Spočítáme souřadnice průsečíků

```
In[1]:= Solve[{3 x - 4 y - 12 == 0, 9 x^2 - 16 y^2 == 144}, {x, y}]

Out[1]= {{x → 4, y → 0}}
```

Soustava rovnic má jediné řešení. Přímka je sečnou hyperboly, protože má stejnou hodnotu směrnice jako asymptota hyperboly a je s touto asymptotou rovnoběžná.(viz. obr.)

```
In[2]:= ImplicitPlot[{3 x - 4 y - 12 == 0, 9 x^2 - 16 y^2 == 144,
         3 x - 4 y == 0, -3 x - 4 y == 0}, {x, -7, 7},
        AspectRatio → Automatic, PlotRange → {-6, 6}]
```




```
Out[2]= - Graphics -
```

b) $h: 8x^2 - 9y^2 = 144, \quad p: x - 7y + 22 = 0$

rovnice asymptot $y = \pm\sqrt{\frac{8}{9}}\,x$

Spočítáme souřadnice průsečíků

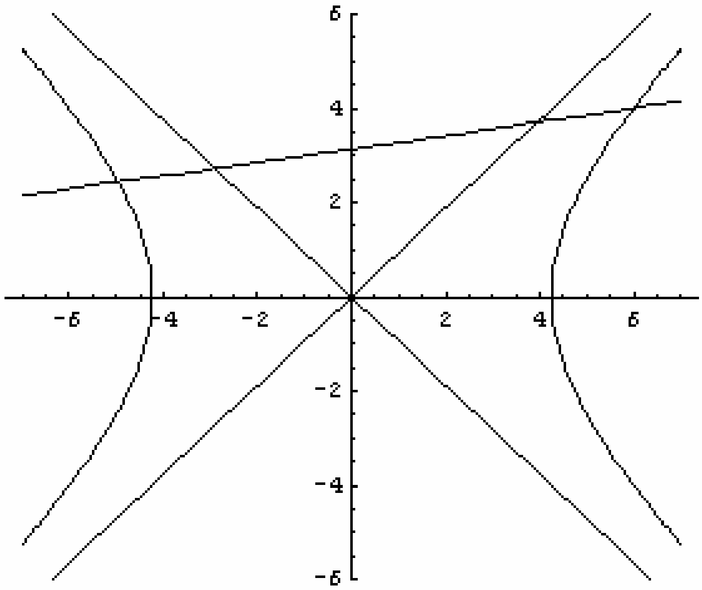
```
In[3]:= Solve[{x - 7 y + 22 == 0, 8 x^2 - 9 y^2 == 144}, {x, y}]
```

Out[3]= $\left\{\left\{x \to -\frac{1902}{383},\ y \to \frac{932}{383}\right\},\ \{x \to 6,\ y \to 4\}\right\}$

```
In[4]:= Solve[{x - 7 y + 22 == 0, 8 x^2 - 9 y^2 == 144}, {x, y}] //
          N

Out[4]= {{x -> -4.96606, y -> 2.43342}, {x -> 6., y -> 4.}}
```

Soustava rovnic má dvě různá řešení, přímka a hyperbola mají dva různé společné body, přímka je sečnou hyperboly.

```
In[5]:= ImplicitPlot[{x - 7 y + 22 == 0, 8 x^2 - 9 y^2 == 144,
          4 x - √18 y == 0, -4 x - √18 y == 0}, {x, -7, 7},
          AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> {-6, 6}]
```



Out[5]= - Graphics -

c) $h: 64x^2 - 81y^2 = 5184, \quad p: 2x - y = 0$

rovnice asymptot

$$y = \pm\sqrt{\frac{64}{81}}\,x$$

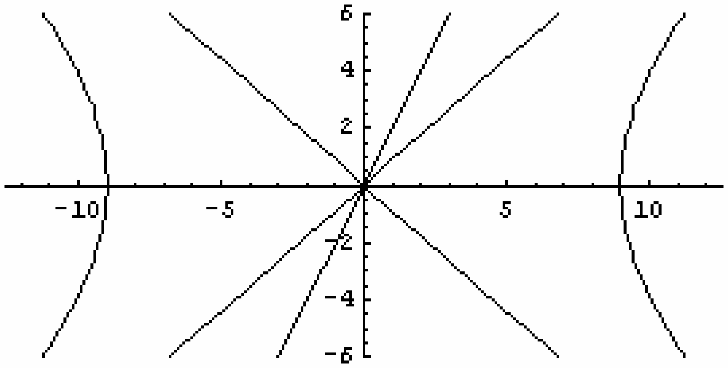
Spočítáme souřadnice průsečíků

```
In[6]:= Solve[{2 x - y == 0, 64 x^2 - 81 y^2 == 5184}, {x, y}]
```

Out[6]= $\left\{\left\{x \to -\frac{36\,i}{\sqrt{65}},\ y \to -\frac{72\,i}{\sqrt{65}}\right\},\ \left\{x \to \frac{36\,i}{\sqrt{65}},\ y \to \frac{72\,i}{\sqrt{65}}\right\}\right\}$

Soustava rovnic nemá řešení v oboru reálných čísel, přímka a hyperbola nemají společný bod, přímka je vnější přímkou hyperboly.

```
In[9]:= ImplicitPlot[{2 x - y == 0, 64 x^2 - 81 y^2 == 5184,
   8 x - 9 y == 0, -8 x - 9 y == 0}, {x, -12, 12},
  AspectRatio → Automatic, PlotRange → {-6, 6}]
```



Out[9]= - Graphics -

d) $h: 4x^2 - y^2 = 64, \quad p: 10x - 3y - 32 = 0$

rovnice asymptot

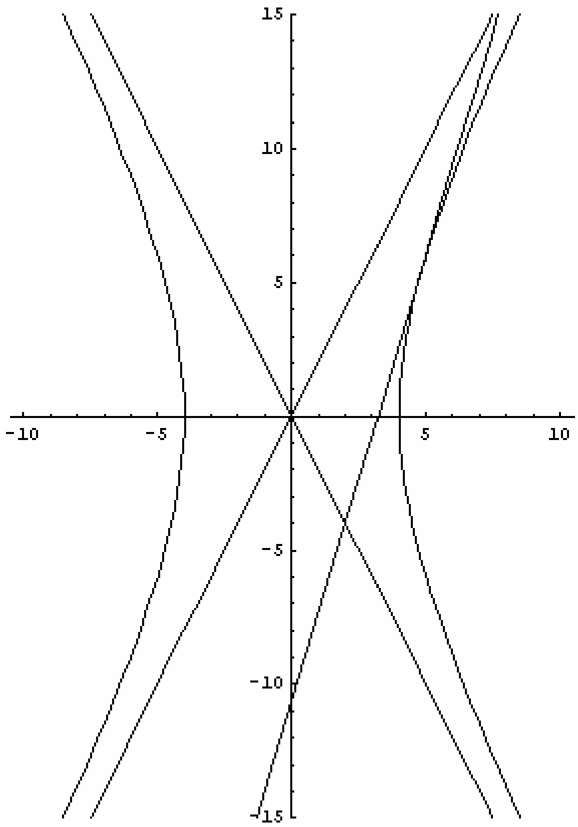
$y = \pm\, 2x$

Spočítáme souřadnice průsečíků

```
In[17]:= Solve[{10 x - 3 y - 32 == 0, 4 x^2 - y^2 == 64}, {x, y}]

Out[17]= {{x → 5, y → 6}, {x → 5, y → 6}}
```

Soustava rovnic má jedno řešení, přímka a hyperbola mají jeden společný bod. Směrnice přímky k=$\frac{10}{3}$, směrnice asymptot je ± 2. Směrnice přímky a asymptot jsou různé, přímka je tečnou hyperboly

```
In[23]:= ImplicitPlot[{10 x - 3 y - 32 == 0, 4 x^2 - y^2 == 64,
           2 x - y == 0, -2 x - y == 0}, {x, -10, 10},
          AspectRatio → Automatic, PlotRange → {-15, 15}]
```




```
Out[23]= - Graphics -
```

Parabola

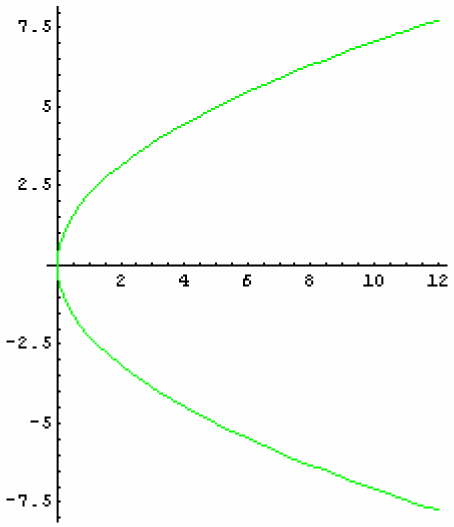
Parabola a její rovnice

Z vrcholové rovnice paraboly získáme souřadnice vrcholu paraboly a parametr paraboly.

Příklad 33: Najděte souřadnice vrcholu paraboly a parabolu zobrazte.

a) $y^2 = 5x$
souřadnice vrcholu $V[0,0]$

In[9]:= `ImplicitPlot[y^2 == 5 x, {x, -12, 12}, PlotStyle → RGBColor[0, 1, 0]]`

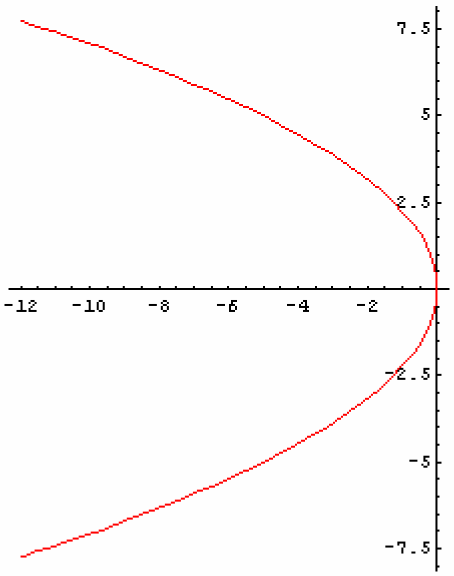


Out[9]= - Graphics -

b) $y^2 = -5x$

souřadnice vrcholu $V[0{,}0]$

```
In[11]:= ImplicitPlot[y^2 == -5 x, {x, -12, 12},
          PlotStyle → RGBColor[1, 0, 0]]
```

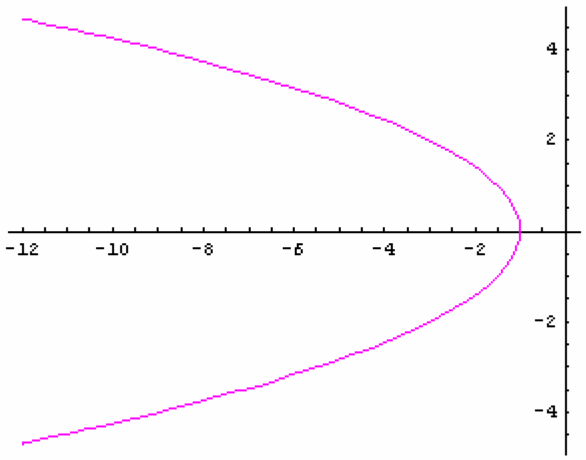



```
Out[11]= - Graphics -
```

c) $y^2 + 2x + 2 = 0$

vrcholová rovnice $y^2 = -2\cdot(x+1)$, souřadnice vrcholu $V[-1{,}0]$

```
In[12]:= ImplicitPlot[y^2 + 2 x + 2 == 0, {x, -12, 12},
          PlotStyle → RGBColor[1, 0, 1]]
```

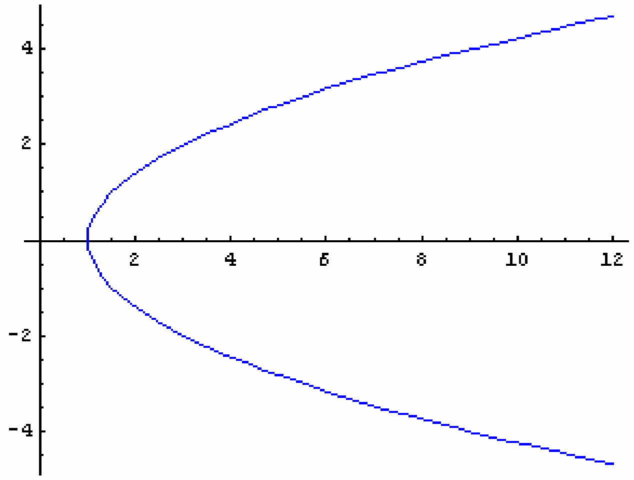



```
Out[12]= - Graphics -
```

d) c) $y^2 - 2x + 2 = 0$

vrcholová rovnice $y^2 = 2 \cdot (x-1)$, souřadnice vrcholu $V[1,0]$

```
In[13]:= ImplicitPlot[y^2 - 2 x + 2 == 0, {x, -12, 12},
        PlotStyle → RGBColor[0, 0, 1]]
```

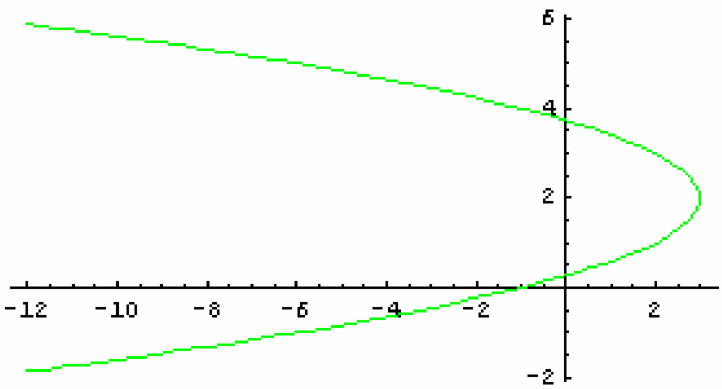



```
Out[13]= - Graphics -
```

e) $y^2 - 4y + x + 1 = 0$

vrcholová rovnice $(y-2)^2 = -(x-3)$, souřadnice vrcholu $V[3,2]$

```
In[14]:= ImplicitPlot[y^2 - 4 y + x + 1 == 0, {x, -12, 12},
        PlotStyle → RGBColor[0, 1, 0]]
```

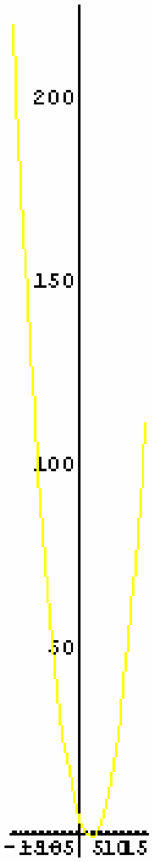



```
Out[14]= - Graphics -
```

g) $x^2 - 6x - 2y + 7 = 0$

vrcholová rovnice $(x-3)^2 = 2(y+1)$, souřadnice vrcholu $V[3,-1]$

```
In[24]:= ImplicitPlot[x^2 - 6 x - 2 y + 7 == 0, {x, -18, 18},
          PlotStyle → RGBColor[1, 1, 0]]
```




```
Out[24]= - Graphics -
```

Vzájemná poloha přímky a paraboly

Vzájemnou polohu přímky a paraboly zjišťujeme řešením soustavy jejich rovnic.
Přímka je sečnou paraboly, má-li s parabolou společné dva různé body, nebo má společný jeden bod a je rovnoběžná s osou paraboly.
Přímka je tečnou paraboly, má-li s parabolou společný jediný bod a není rovnoběžná s osou paraboly.
Přímka je vnější přímkou paraboly, nemá-li s parabolou žádný společný bod.

Příklad 34: Určete vzájemnou polohu přímky a paraboly.

V případě, že mají společné body, určete jejich souřadnice.

a) $y^2 = 6x, \quad 6x - y - 12 = 0$

Spočítáme souřadnice průsečíků

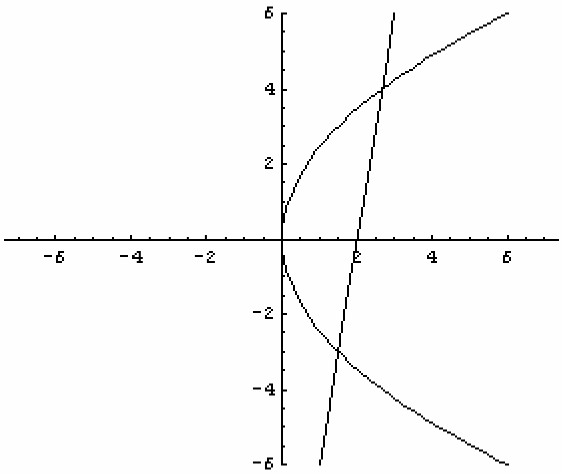
```
In[26]:= Solve[{6 x - y - 12 == 0, y^2 == 6 x}, {x, y}]
```

Out[26]= $\left\{\left\{x \to \frac{3}{2},\ y \to -3\right\},\ \left\{x \to \frac{8}{3},\ y \to 4\right\}\right\}$

```
In[27]:= Solve[{6 x - y - 12 == 0, y^2 == 6 x}, {x, y}] // N

Out[27]= {{x → 1.5, y → -3.}, {x → 2.66667, y → 4.}}
```

Soustava má dvě různá řešení, přímka a parabola mají dva různé společné body, přímka je sečnou paraboly.

```
In[25]:= ImplicitPlot[{6 x - y - 12 == 0, y^2 == 6 x}, {x, -7, 7},
          AspectRatio → Automatic, PlotRange → {-6, 6}]
```




```
Out[25]= - Graphics -
```

b) $y^2 = 10x, \quad 2x + 2y + 5 = 0$

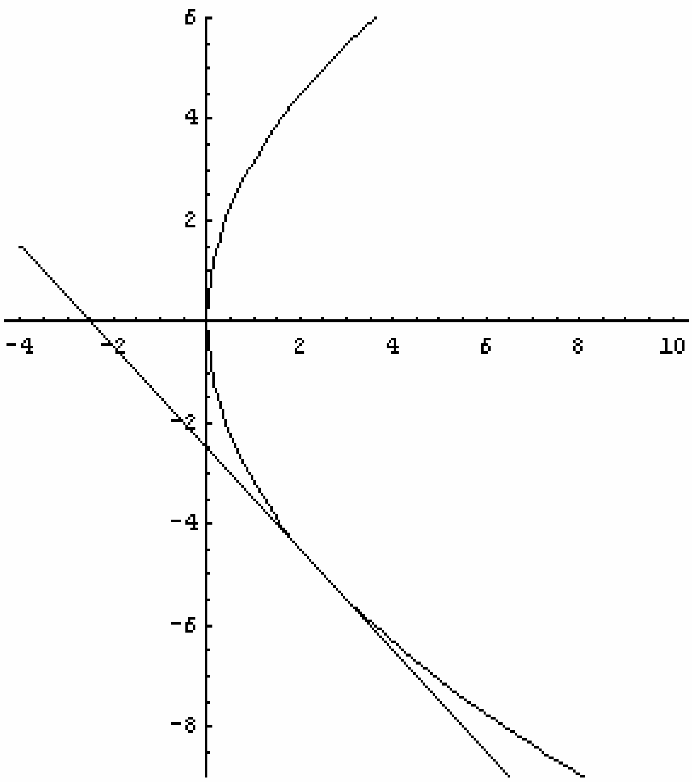
Spočítáme souřadnice průsečíků

```
In[28]:= Solve[{2 x + 2 y + 5 == 0, y^2 == 10 x}, {x, y}]
```

Out[28]= $\left\{\left\{x \to \frac{5}{2}, y \to -5\right\}, \left\{x \to \frac{5}{2}, y \to -5\right\}\right\}$

Soustava má jeden dvojnásobný kořen, přímka a parabola mají jeden společný bod, přímka je tečnou paraboly.

```
In[38]:= ImplicitPlot[{2 x + 2 y + 5 == 0, y^2 == 10 x}, {x, -4, 10},
          AspectRatio → Automatic, PlotRange → {-9, 6}]
```



Out[38]= - Graphics -

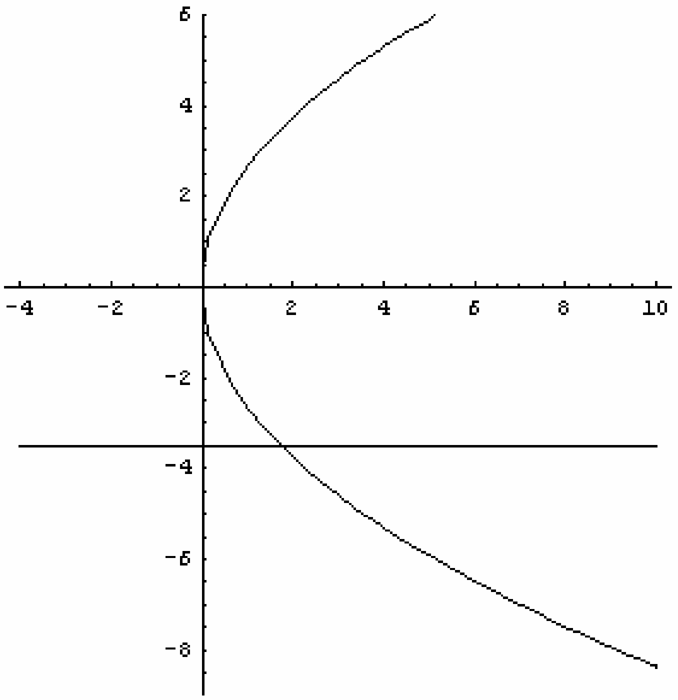
c) $y^2 = 7x, \quad y + 3{,}5 = 0$

Spočítáme souřadnice průsečíků

```
In[39]:= Solve[{y + 3.5 == 0, y^2 == 7 x}, {x, y}]

Out[39]= {{x → 1.75, y → -3.5}}
```

Soustava má jedno řešení, přímka má s parabolou jeden společný bod, přímka je sečnou rovnoběžnou s osou paraboly.

```
In[40]:= ImplicitPlot[{y + 3.5 == 0, y^2 == 7 x}, {x, -4, 10},
          AspectRatio → Automatic, PlotRange → {-9, 6}]
```




```
Out[40]= - Graphics -
```

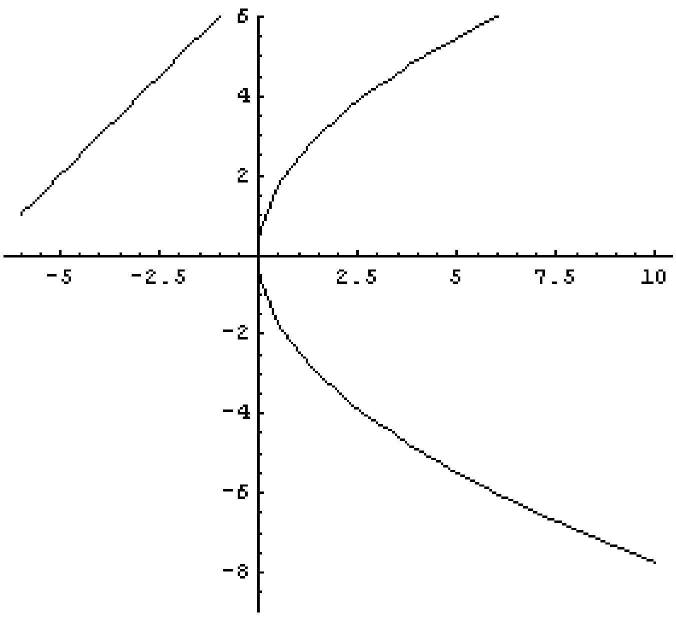
d) $y = x + 7, \quad y^2 = 6x$

Spočítáme souřadnice průsečíků.

```
In[41]:= Solve[{y == x + 7, y^2 == 6 x}, {x, y}]

Out[41]= {{x → -4 - ⅈ √33 , y → 3 - ⅈ √33 },
          {x → -4 + ⅈ √33 , y → 3 + ⅈ √33 }}
```

Soustava nemá reálné kořeny, přímka a parabola nemají společný bod, přímka je vnější přímkou paraboly.

```
In[43]:= ImplicitPlot[{y == x + 7, y^2 == 6 x}, {x, -6, 10},
          AspectRatio → Automatic, PlotRange → {-9, 6}]
```




```
Out[43]= - Graphics -
```

4. KAPITOLA - Derivace funkce a její využití

Geometrický význam derivace funkce v bodě

Směrnice tečny

Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, tak derivace $f'(x_0)$ určuje směrnici tečny k_T ke grafu funkce f v bodě dotyku $T[x_0, f(x_0)]$. Rovnice tečny ke grafu funkce má tvar $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Příklad 35: Napište rovnici tečny ke grafu funkce

ve tvaru y - y0 = kT (x - x0).

a) $y = 2x^3 \quad T[-1, y_0]$

Nejdříve nadefinujeme funkci

```
In[26]:= Clear[f]
         f[x_] := 2*x^3
```

Druhou souřadnici bodu dotyku spočítáme jako hodnotu funkce $f(-1)$.

```
         f[-1]
Out[28]= -2
```

Bod dotyku má souřadnice $T[-1,-2]$

Nyní spočítáme první derivaci funkce f .

```
In[29]:=
         f'[x]
Out[29]= 6 x^2
```

Spočítáme hodnotu první derivace funkce pro $x = -1$

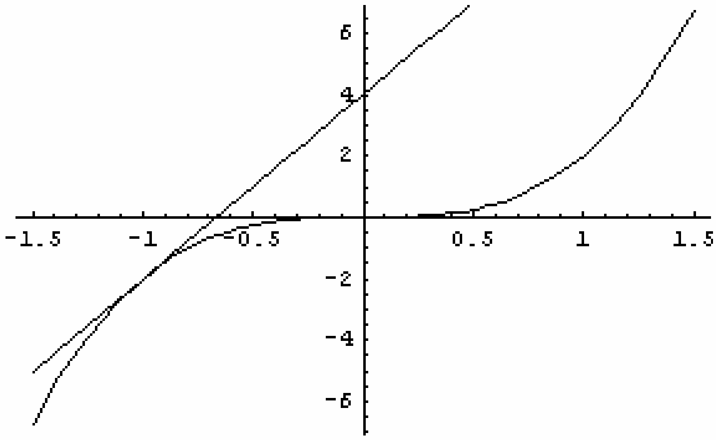
```
In[22]:=
         f'[-1]
Out[22]= 6
```

Napíšeme rovnici tečny $y + 2 = 6(x + 1)$ ve směrnicovém tvaru $y = 6x + 4$

Výsledek ověříme graficky

In[24]:=

```
Plot[{f[x], 6 x + 4}, {x, -1.5, 1.5}]
```



Out[24]= - Graphics -

Na tomto příkladu bylo ukázáno řešení po krocích, když nepoužijeme počítač. Užitím počítače získáme snadno rovnici tečny i graf.

```
In[25]:= Solve[y - f[-1] == f'[-1] * (x + 1), y] // Simplify

Out[25]= {{y → 4 + 6 x}}
```

b) $y = tgx, \quad T\left[\frac{1}{4}\pi, y_0\right]$

```
In[40]:= Clear[g]
         g[x_] := Tan[x]
         g[1/4 π]

Out[42]= 1

In[44]:=
         g'[x]

Out[44]= Sec[x]^2

In[46]:=
         g'[1/4 π]

Out[46]= 2
```

In[48]:=

```
y - g[1/4 π] == g'[1/4 π] * (x - 1/4 π)
```

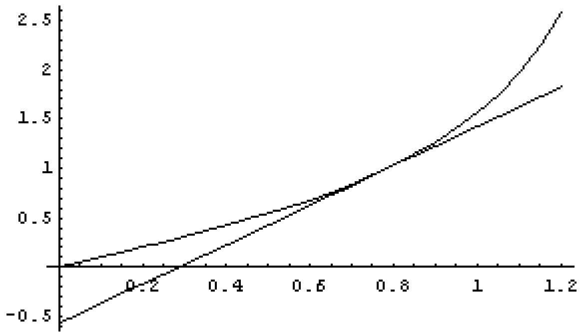
Out[48]= $-1 + y == 2\left(-\frac{\pi}{4} + x\right)$

In[49]:=

```
Solve[y - g[1/4 π] == g'[1/4 π] * (x - 1/4 π), y] //
 Simplify
```

Out[49]= $\left\{\left\{y \to 1 - \frac{\pi}{2} + 2x\right\}\right\}$

```
Plot[{g[x], 1 - π/2 + 2*x}, {x, 0, 1.2}]
```



- Graphics -

Příklad 36: Napište rovnici tečny grafu dané funkce

v bodě T[x_0, y_0].

a) $y = \dfrac{2x^2 - 1}{x + 1}$ $\quad T\left[-\dfrac{1}{2}, y_0\right]$

Nadefinujeme funkci a spočítáme druhou souřadnici bodu dotyku.

In[100]:=

```
Clear[f]
f[x_] := (2*x^2 - 1) / (x + 1)
f[-1/2]
```

Out[102]= -1

Spočítáme první derivaci a její hodnotu pro x_0.

In[103]:=

```
f'[x] // Simplify
```

Out[103]= $\dfrac{1 + 4x + 2x^2}{(1 + x)^2}$

In[104]:=

```
f'[-1/2]
```

Out[104]= -2

Napíšeme rovnici tečny a sestrojíme graf.

In[105]:=

```
y - f[-1/2] == f'[-1/2] * (x + 1/2)
```

Out[105]= $1 + y == -2\left(\frac{1}{2} + x\right)$

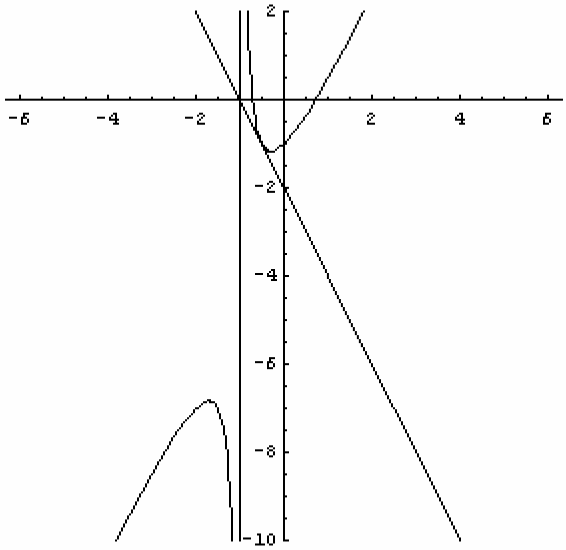
In[106]:=

```
Solve[y - f[-1/2] == f'[-1/2] * (x + 1/2), y] // Simplify
```

Out[106]= $\{\{y \to -2\,(1 + x)\}\}$

In[117]:=

```
Plot[{f[x], -2 * (1 + x)}, {x, -6, 6}, AspectRatio → Automatic,
 PlotRange → {-10, 2}]
```



Out[117]= - Graphics -

b) $y = \dfrac{3x-1}{2x+3}$ $\quad T\,[0, y_0]$

```
In[118]:= Clear[f]
          f[x_] := (3*x - 1) / (2 x + 3)
          f[0]
```

Out[120]= $-\frac{1}{3}$

```
In[121]:= f'[x] // Simplify
```

Out[121]= $\frac{11}{(3+2x)^2}$

```
In[122]:=
          f'[0]
```

Out[122]= $\frac{11}{9}$

```
In[123]:=
          y - f[0] == f'[0]*x
```

Out[123]= $\frac{1}{3} + y == \frac{11x}{9}$

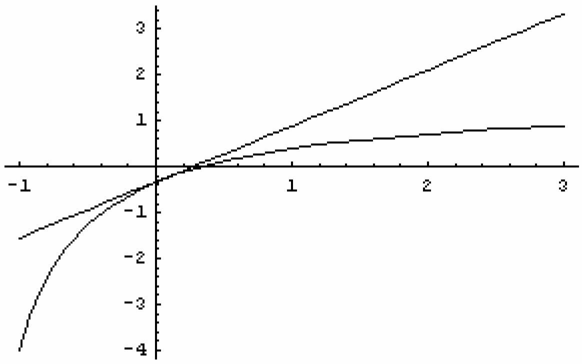
```
In[124]:= Solve[y - f[0] == f'[0]*x, y] // Simplify
```

Out[124]= $\left\{\left\{y \to \frac{1}{9}(-3+11x)\right\}\right\}$

In[127]:= $\left\{\left\{y \to \frac{1}{9}(-3+11x)\right\}\right\}$

```
          Plot[{f[x], 1/9*(-3 + 11 x)}, {x, -1, 3}]
```

Out[127]= $\left\{\left\{y \to \frac{1}{9}(-3+11x)\right\}\right\}$



Out[128]= - Graphics -

Průběh funkce

Monotónnost funkce

1) Nalezneme nulové body (v těchto bodech je $f'(x) = 0$)
2) Tyto body rozdělí definiční obor na jednotlivé intervaly.
3) Zjistíme znaménko f' v jednotlivých intervalech.
4) Vyslovíme závěr

Příklad 37: Určete intervaly monotónnosti funkcí.

a) $y = 3x - x^3$

Funkce je definovaná na množině $D(f) = R$.

Nadefinujeme funkci, spočítáme její první derivaci a určíme nulové body.

```
In[7]:= Clear[f]
        f[x_] := 3*x - x^3
        f'[x] // Simplify

Out[9]= 3 - 3 x^2

In[10]:=
        Solve[f'[x] == 0, x]

Out[10]= {{x → -1}, {x → 1}}
```

Oba kořeny rovnice jsou reálná čísla, jsou tedy nulovými body. Definiční obor rozdělíme na intervaly $J_1 = (-\infty, -1)$, $J_2 = (-1, 1)$, $J_3 = (1, \infty)$. V jednotlivých intervalech si zvolíme libovolný bod a vypočítáme hodnotu derivace funkce v tomto bodě. Zvolíme například $-2 \in J_1$, $0 \in J_2$, $5 \in J_3$

```
In[11]:= f'[-2]

Out[11]= -9

In[12]:=
        f'[0]

Out[12]= 3

In[13]:=
        f'[5]

Out[13]= -72
```

Závěr:

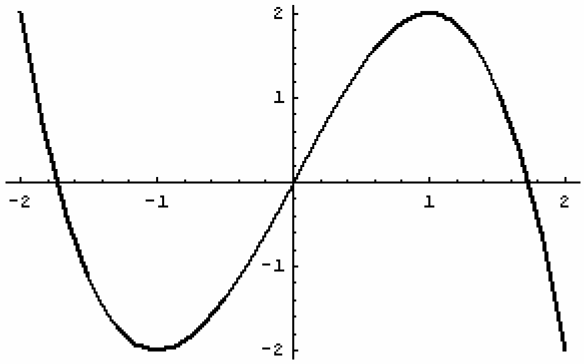
$f'(-2) \langle\, 0$, z čehož vyplývá, že $f'(x) \langle\, 0$ pro každé $x \in (-\infty, -1)$, a tedy funkce je v celém intervalu J_1 klesající.

$f'(0) \rangle\, 0$, z čehož vyplývá, že $f'(x) \rangle\, 0$ pro každé $x \in (-1, 1)$, a tedy funkce je v celém intervalu J_2 rostoucí.

$f'(5) \langle\, 0$, z čehož vyplývá, že $f'(x) \langle\, 0$ pro každé $x \in (1, \infty)$, a tedy funkce je v celém intervalu J_3 klesající.

Pro lepší představu si graf nakreslíme.

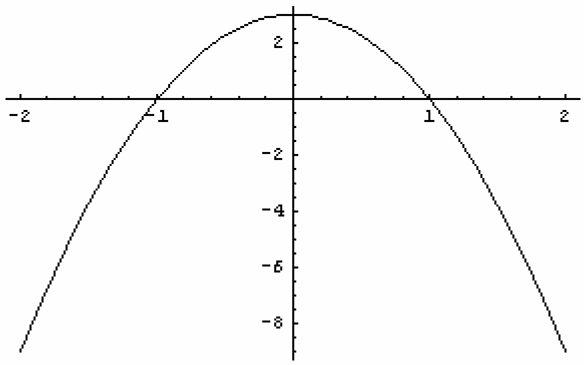
```
In[14]:= grf = Plot[f[x], {x, -2, 2}, PlotStyle → Thickness[0.008]]
```




```
Out[14]= - Graphics -
```

Ještě si ukážeme grafickou metodu zjišťování znaménka derivace. Nakreslíme graf první derivace funkce na intervalu, který bude obsahovat všechny nulové body.

```
In[15]:= grder = Plot[f'[x], {x, -2, 2}, PlotStyle → Thickness[0.004]]
```

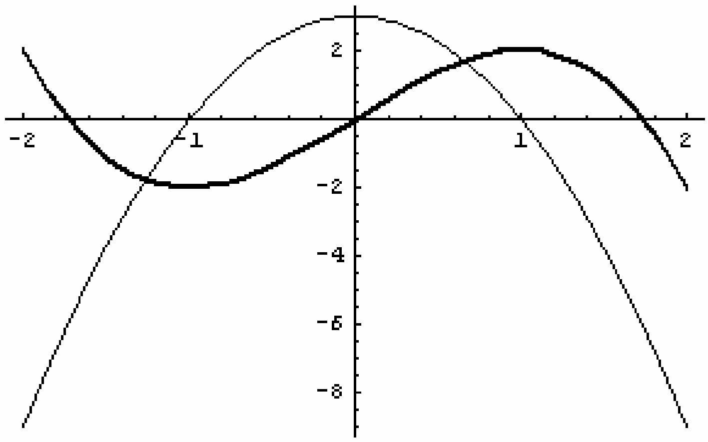



```
Out[15]= - Graphics -
```

Závěr:
Body, ve kterých graf derivace protíná osu x jsou nulové body $x_1 = -1, x_2 = 1$. Vidíme, že graf derivace je pod osou x na intervalech $(-\infty,-1), (1,\infty)$, a tedy funkce je zde klesající. V případě intervalu $(-1,1)$ je graf derivace nad osou x, a tedy funkce je zde rostoucí.

Pro lepší představu spojíme oba grafy do jednoho obrázku.

```
In[16]:= Show[%14, %15]
```




```
Out[16]= - Graphics -
```

b) $y = x^2 \cdot e^{-x}$

$D(f) = R$, nadefinujeme funkci, určíme první derivaci funkce a nulové body, které rozdělí definiční obor na intervaly, ze kterých vybereme libovolné body. Určíme hodnotu první derivace funkce v těchto bodech, sestrojíme graf funkce a první derivace

.

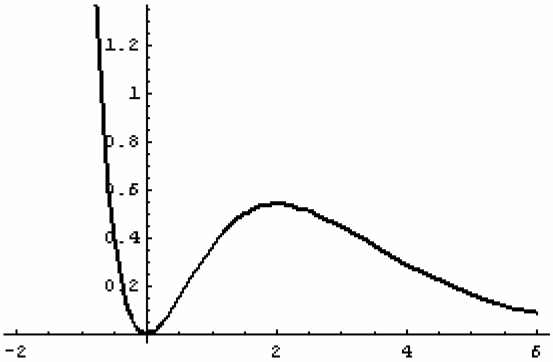
```
In[26]:= Clear[f]
         f[x_] := x^2 * e^-x
         f'[x] // Simplify

Out[28]= -e^-x (-2 + x) x

In[29]:=
         Solve[f'[x] == 0, x]

Out[29]= {{x → 0}, {x → 2}}

In[30]:= {{x → 0}, {x → 2}}
         f'[-3]

Out[30]= {{x → 0}, {x → 2}}

Out[31]= -15 e^3

In[32]:=
         f'[1]

Out[32]= 1/e
```

In[33]:=

```
f'[5]
```

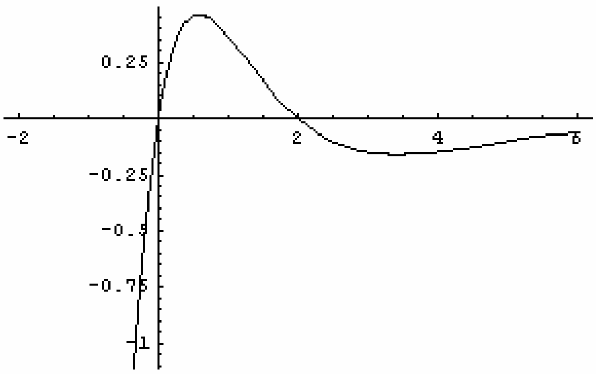
Out[33]= $-\frac{15}{e^5}$

In[37]:= `grf = Plot[f[x], {x, -2, 6}, PlotStyle → Thickness[0.009]]`



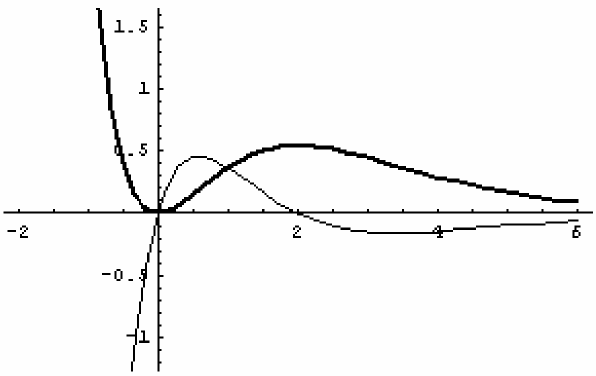
Out[37]= - Graphics -

In[38]:= `grder = Plot[f'[x], {x, -2, 6}, PlotStyle → Thickness[0.004]]`



Out[38]= - Graphics -

In[39]:= `Show[%37, %38]`



Out[39]= - Graphics -

Lokální extrémy funkce

- Nechť $f'(x) = 0$ a nechť existuje v bodě x_0 druhá derivace.
- Je-li $f''(x_0) \langle\, 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

- Je-li $f''(x_0) > 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

Příklad 38: Vyšetřete lokální extrémy funkce

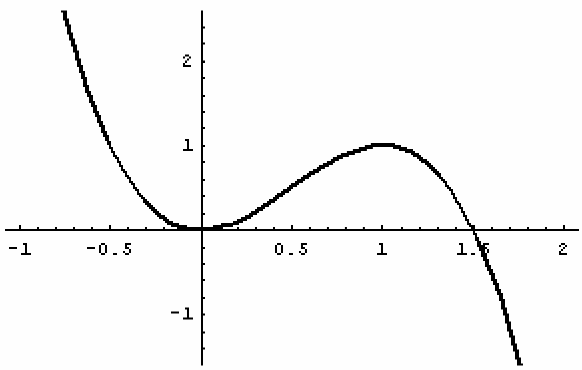
$y = 3x^2 - 2x^3$.

Nadefinujeme funkci, určíme první derivaci funkce, v nulových bodech nulové body, druhou derivaci funkce a spočítáme hodnotu druhé derivace funkce

```
In[4]:= Clear[f]
        f[x_] := 3*x^2 - 2*x^3
        f'[x]

Out[6]= 6 x - 6 x^2

In[7]:=
        Solve[f'[x] == 0, x]

Out[7]= {{x → 0}, {x → 1}}

In[8]:=
        f''[x]

Out[8]= 6 - 12 x

In[9]:=
        f''[0]

Out[9]= 6

In[10]:=
        f''[1]

Out[10]= -6
```

Z výsledku vidíme, že v bodě $x_1 = 0$ je $f''(0) > 0$, a tedy v tomto bodě nastává lokální minimum, v bodě $x_2 = 1$ je $f''(1) < 0$, a tedy zde nastává lokální maximum.
Pro ilustraci si situaci zobrazíme.

```
In[13]:= Plot[f[x], {x, -1, 2}, PlotStyle → Thickness[0.008]]
```




```
Out[13]= - Graphics -
```

Konvexnost a konkávnost funkce

Konvexnost nebo konkávnost funkce, která má druhou derivaci, budeme vyšetřovat tak, že nalezneme intervaly, na kterých je druhá derivace funkce kladná nebo záporná. (Při hledání intervalů a znamének postupujeme stejně jako při vyšetřování monotónnosti funkce.)

- Je-li $f''(x_0) \rangle\, 0$, pak je funkce f v bodě x_0 konvexní.
- Je-li $f''(x_0) \langle\, 0$, pak je funkce f v bodě x_0 konkávní.

Příklad 39: Určete intervaly, ve kterých je funkce konvexní a konkávní.

$y = x^3 - 3x^2$

Funkci nadefinujeme , určíme druhou derivaci funkce, nulové body z rovnice $f''(x) = 0$. Nulové body rozdělí definiční obor na intervaly, ve kterých budeme zjišťovat hodnotu druhé derivace.

```
In[14]:= Clear[f]
         f[x_] := x^3 - 3 x^2
         f'[x]

Out[16]= -6 x + 3 x^2

In[17]:=
         f''[x]

Out[17]= -6 + 6 x

In[18]:=
         Solve[f''[x] == 0, x]

Out[18]= {{x → 1}}
```

Bod $x = 1$ nám rozdělí definiční obor $D(f) = R$ na dva intervaly $J_1 = (-\infty, 1), J_2 = (1, \infty)$. V prvním intervalu si zvolíme například $x_1 = -2$ a ve druhém intervalu $x_2 = 3$. Vypočítáme hodnoty druhé derivace funkce v těchto bodech a sestrojíme graf.

In[19]:= {{x → 1}}
f''[-2]

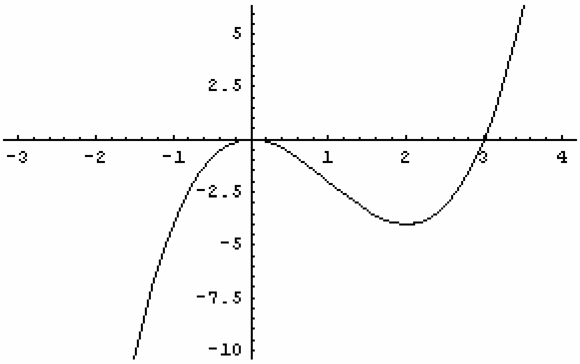
Out[19]= {{x → 1}}

Out[20]= -18

In[21]:=
f''[3]

Out[21]= 12

In[22]:=
Plot[f[x], {x, -3, 4}]



Out[22]= - Graphics -

Pro lepší představu sestrojíme v bodech $x_1 = -2$ a $x_2 = 3$ tečny ke grafu funkce.

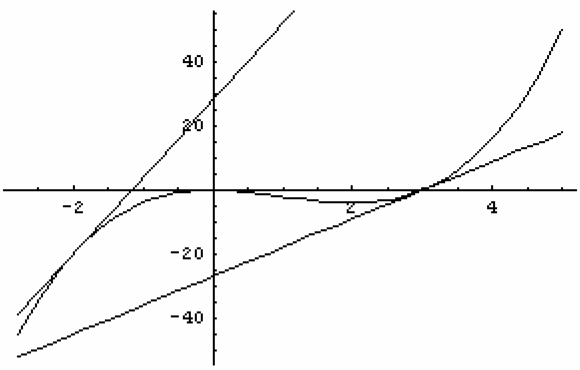
In[15]:= Solve[y - f[-2] == f'[-2] * (x + 2), y] // Simplify

Out[15]= {{y → 4 (7 + 6 x)}}

In[16]:= Solve[y - f[3] == f'[3] * (x - 3), y] // Simplify

Out[16]= {{y → 9 (-3 + x)}}

In[20]:=
Plot[{f[x], 4 * (7 + 6 * x), 9 * (-3 + x)}, {x, -2.8, 5}]



Out[20]= - Graphics -

Závěr:
Je-li bod z intervalu J_1 je $f''(x_0) \langle 0$ a graf funkce je konkávní – pod tečnou sestrojenou v bodě $[x_0, f(x_0)]$

Je-li bod z intervalu J_2 je $f''(x_0) \rangle 0$ a graf funkce je konvexní – nad tečnou sestrojenou v bodě $[x_0, f(x_0)]$.

Inflexní body funkce

- Nechť funkce f má v bodě x_0 derivaci. Jestliže v tomto bodě přechází graf funkce f z polohy konvexní do polohy konkávní nebo naopak, nazýváme bod x_0 inflexní bod funkce f.
- Je-li bod x_0 inflexním bodem funkce f a má-li funkce f v tomto bodě druhou derivaci, pak $f''(x_0) = 0$.
- Platí-li pro funkci f v bodě x_0, že $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, pak má funkce f v bodě x_0 inflexní bod.

Postup hledání inflexních bodů:

1) Řešením rovnice $f''(x) = 0$ nalezneme „podezřelé body“, ve kterých může mít funkce inflexní body.
2) Vypočítáme hodnotu $f'''(x)$ nebo zjistíme znaménkové změny druhé derivace v okolí těchto bodů.
3) Vyslovíme závěr.

Příklad 39: Určete inflexní body funkce.

$$y = \frac{x}{1 + x^2}$$

Definiční obor $D(f) = R$.

```
In[24]:= Clear[f]
         f[x_] := x / (1 + x^2)
         f'[x] // Simplify
```

Out[26]= $\frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$

```
In[28]:=
         f''[x] // Simplify
```

Out[28]= $\frac{2 x (-3 + x^2)}{(1 + x^2)^3}$

In[29]:=

```
Solve[f''[x] == 0, x]
```

Out[29]= $\{\{x \to 0\}, \{x \to -\sqrt{3}\}, \{x \to \sqrt{3}\}\}$

In[30]:= `Solve[f''[x] == 0, x] // N`

Out[30]= {{x → 0.}, {x → -1.73205}, {x → 1.73205}}

In[31]:=

```
f'''[x] // Simplify
```

Out[31]= $-\frac{6\,(1-6x^2+x^4)}{(1+x^2)^4}$

Kořeny rovnice $f''(x)=0$ jsou reálná čísla, můžeme vypočítat hodnotu třetí derivace v těchto bodech.

In[32]:=

```
f'''[0]
```

Out[32]= -6

In[33]:=

```
f'''[√3]
```

Out[33]= $\frac{3}{16}$

In[34]:=

```
f'''[-√3]
```

Out[34]= $\frac{3}{16}$

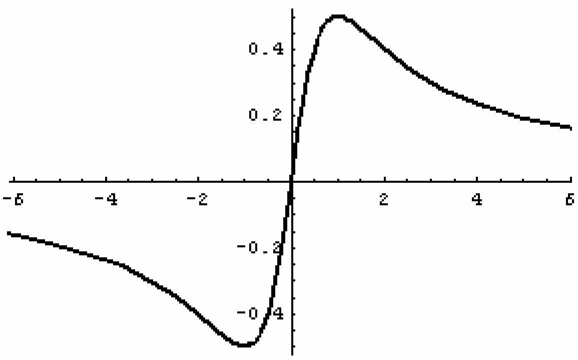
Ve všech případech je hodnota třetí derivace funkce různá od nuly. Získáváme inflexní body $I_1=[0,0]$, $I_2=\left[\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$, $I_3=\left[-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$.

Na závěr nakreslíme graf funkce a)

graf funkce s tečnami sestrojenými v bodech I_1, I_2, I_3

In[46]:=

```
Plot[f[x], {x, -10, 10}, PlotStyle → Thickness[0.008]]
```



Out[46]= - Graphics -

In[35]:=

```
f[0]
```

Out[35]= 0

In[36]:=

$$f[\sqrt{3}]$$

Out[36]= $\frac{\sqrt{3}}{4}$

In[37]:= $f[\sqrt{3}]$ // N

Out[37]= 0.433013

In[38]:= $f[-\sqrt{3}]$

Out[38]= $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

In[43]:=

Solve$[y - f[\sqrt{3}] == f'[\sqrt{3}] * (x - \sqrt{3}), y]$ // Simplify

Out[43]= $\{\{y \to \frac{1}{8} (3\sqrt{3} - x)\}\}$

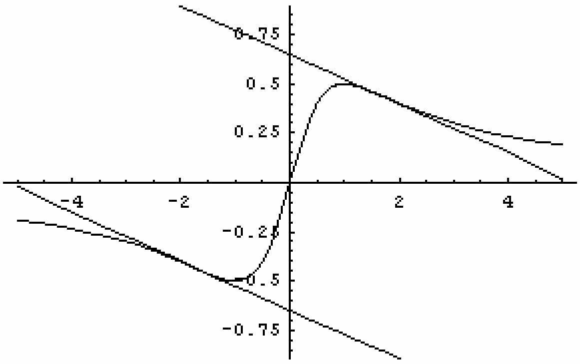
In[44]:= Solve$[y - f[-\sqrt{3}] == f'[-\sqrt{3}] * (x + \sqrt{3}), y]$ // Simplify

Out[44]= $\{\{y \to \frac{1}{8} (-3\sqrt{3} - x)\}\}$

In[45]:= Solve[y - f[0] == f'[0] * x, y] // Simplify

Out[45]= {{y → x}}

In[56]:= Plot$[\{f[x], 1/8 * (3 * \sqrt{3} - x), 1/8 * (-3 * \sqrt{3} - x), 0\},$
{x, -5, 5}, PlotRange → {-0.9, 0.9}]



Out[56]= - Graphics -

Vyšetřování průběhu funkce

Postup při vyšetřování průběhu funkce

1) Definiční obor, funkce sudá, lichá, periodická
2) Průsečíky s osami x, y
3) Nulové body, intervaly monotónnosti
4) Lokální extrémy
5) Inflexní body, intervaly konvexnosti a konkávnosti
6) Asymptoty grafu funkce
7) Graf funkce

Příklad 40: Vyšetřete průběh funkce

$$y = \frac{x^2}{x-1}$$

1) $D(f) = R - \{1\}$

```
In[58]:= Clear[f]
         f[x_] := x^2 / (x - 1)
         f[2]

Out[60]= 4

In[61]:=
         f[-2]

Out[61]= -4/3
```

Z výpočtu vyplývá, že funkce není sudá , lichá ani periodická.

2)

```
         Solve[x^2 / (x - 1) == 0, x]

Out[65]= {{x → 0}, {x → 0}}

In[71]:= {{x → 0}, {x → 0}}
         f[0]

Out[71]= {{x → 0}, {x → 0}}

Out[72]= 0
```

Funkce má s osami jeden průsečík $A[0,0]$

3)

In[74]:=

```
f'[x] // Simplify
```

Out[74]= $\frac{(-2+x)\,x}{(-1+x)^2}$

In[75]:= $\frac{(-2+x)\,x}{(-1+x)^2}$

```
Solve[f'[x] == 0, x]
```

Out[75]= $\frac{(-2+x)\,x}{(-1+x)^2}$

Out[76]= $\{\{x \to 0\}, \{x \to 2\}\}$

In[77]:=

```
f[0]
```

Out[77]= 0

In[78]:=

```
f[2]
```

Out[78]= 4

Funkce má dva nulové body $B[0,0]$, $C[2,4]$. Definiční obor se rozdělí na intervaly $J_1 = (-\infty,0)$, $J_2 = (0,1)$, $J_3 = (1,2)$, $J_4 = (2,\infty)$. Zvolíme $-4 \in J_1$, $0{,}5 \in J_2$, $1{,}5 \in J_3$, $5 \in J_4$ a určíme hodnoty první derivace funkce v těchto bodech.

```
f'[-4]
```

Out[79]= 4

Out[80]= $\frac{24}{25}$

In[82]:=

```
f'[1/2]
```

Out[82]= -3

In[83]:= `f'[3/2]`

Out[83]= -3

In[84]:= `f'[5]`

Out[84]= $\frac{15}{16}$

Závěr: Funkce je rostoucí na intervalech $(-\infty,0)$, $(2,\infty)$ a klesající na intervalech $(0,1)$, $(1,2)$

4)

In[85]:= f''[0]

Out[85]= -2

In[86]:= f''[2]

Out[86]= 2

V bodě $B[0,0]$ nastává lokální maximum funkce- $f''(0)\langle\, 0$, v bodě $C[2,4]$ nastává lokální minimum- $f''(2)\rangle\, 0$.

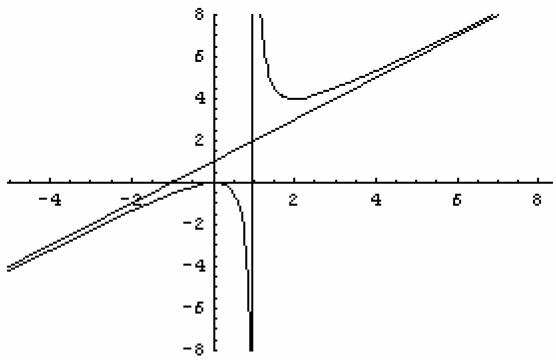
5)

```
In[89]:= f''[x] // Simplify

Out[89]= 2/(-1 + x)^3

In[87]:= Solve[f''[x] == 0, x]

Out[87]= {}
```

Rovnice nemá řešení, inflexní body funkce nemá.

6) Asymptota bez směrnice má rovnici $x = 1$, asymptota se směrnicí má rovnici $y = ax + b$

```
In[94]:=
      Limit[f[x] / x, x → Infinity]

Out[94]= 1

      a = 1
      Limit[f[x] - x, x → Infinity]

Out[95]= 1

      1
      b = 1

      asymptotaly == x + 1
      Plot[{f[x], x + 1}, {x, -8, 8}, PlotRange → {-8, 8}]

Out[117]= 1 + x
```




```
Out[118]= - Graphics -
```

Obsah